MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

48. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 17. DEZEMBER 1942)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1942

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107[IV],
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

48. Band. **Inhalt:** 3. Heft.

Seite

Strubecker, Prof. Dr. K., Straßburg i. Els., Mathem. Inst. d. Univ.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III. Flächentheorie 369

Dinghas, Dr. habil. Alex., Berlin NW 7, Luisenstr. 51, I: Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken 428

Obreschkoff, Prof. N., Strasse Zar Samouil 26, Sofia (Bulgarien): Über das Riemannsche Summierungsverfahren 441

Sauer, Prof. Dr. R., Aachen, Im Brockenfeld 15: Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen 455

Perron, Prof. Dr. O., München 27, Friedr.-Herschel-Str. 11: Einige Bemerkungen über rationale Flächen 467

Neder, Prof. Dr. L., Münster i. Westf., Gertrudenstr. 39: Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen 497

Rédei, Prof. Dr. L., Szeged, Ungarn, Baross Gábor Str. 2: Zu einem Approximationssatz von Koksma 500

Eichler, Doz. Dr. M., Darmstadt, Techn. Hochschule, Inst. f. prakt. Mathematik: Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern 503

Baier, Doz. Dr. O., Stuttgart, Mathem. Seminar der Techn. Hochschule: Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene 527

Krull, Prof. Dr. W., Bonn a. Rh., Kaiser-Friedrich-Str. 18: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche 530

Preisaufgabe der Technischen Hochschule Karlsruhe 532

Differentialgeometrie des isotropen Raumes. III.

Flächentheorie.

Von

Karl Strubecker in Straßburg.

Einleitung.

Gestützt auf die Theorie der Kurven des isotropen Raumes, welche ich in der ersten Arbeit dieser Reihe[1]) in ihren Grundzügen entwickelt habe, werden hier die Elemente der isotropen Flächentheorie dargelegt. Die Arbeit ist als Grundlage für eine Reihe weiterer Untersuchungen gedacht und bringt daher vorerst nur wenige der möglichen Anwendungen ihrer Ergebnisse. Über eine erste solche Anwendung, nämlich über die Geometrie der Flächen fester Relativkrümmung K des isotropen Raumes, d. h. über die so oft studierten Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$(*) \qquad K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0$$

habe ich vor kurzem berichtet[2]).

Um jedoch die vorliegende Arbeit für sich lesbar zu gestalten, habe ich an ihren Anfang eine knappe Zusammenstellung einiger Hauptpunkte der Geometrie, insbesondere der Metrik und Kinematik und der Kurventheorie des isotropen Raumes gesetzt.

Die Geometrie des isotropen Raumes läßt sich als ein Ausschnitt der euklidischen vierdimensionalen Raumgeometrie auffassen. Ihr Schauplatz ist dort ein Tangentialraum der absoluten Fläche zweiter Ordnung, und ihr eigenes absolutes Gebilde daher ein schneidendes Geradenpaar der Fernebene $t = 0$ des Raumes (x, y, z), das wir aus Realitätsgründen gerne in der Form

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

annehmen, so daß das isotrope Bogenelement ds die Gestalt

$$(**) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

annimmt.

[1]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I. Theorie der Raumkurven. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **150** (1941), S. 1—53.

[2]) K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II. Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 743—777.

Über die Eigenarten der Geometrie des isotropen Raumes habe ich nun schon bei verschiedenen Gelegenheiten mitgeteilt[3]). Ein besonderes Kennzeichen dieser Geometrie ist es, daß viele ihrer gebräuchlichen algebraischen und differentiellen Invarianten, wie z. B. Längen, Winkel, Krümmungen, Krümmungsmaß usw., gelegentlich oder stets durch identisches Verschwinden versagen können. Es zeigt sich aber, daß in allen diesen Fällen geeignete Ersatzinvarianten zur Verfügung stehen, mit deren Hilfe sich die isotrope Raumgeometrie dann weiterentwickeln läßt.

So folgt z. B. aus der Form (**) des isotropen Bogenelementes, daß das Gausssche Krümmungsmaß K_a der Flächen des isotropen Raumes identisch verschwindet. Dafür gibt es eine gewisse Ersatzinvariante, nämlich die sogenannte Relativkrümmung K der Fläche

$$(***) \qquad K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

die eine Reihe gewohnter und wichtiger Eigenschaften und Funktionen der versagenden Gaussschen Krümmung übernimmt.

Die Geometrie des isotropen Raumes ist (wie die elliptische und quasielliptische Geometrie, mit denen sie überdies in enger Berührung steht) hinsichtlich Lage und Maß in sich dual, und könnte daher auch formal in völlig selbstdualer Weise entwickelt werden. Das ist hier nicht vollends geschehen, teils aus Raumgründen, teils aus Gründen der Terminologie, die ja nicht nur unter dem Einflusse dieser Dualität sich verdoppeln würde, die vielmehr wegen der erwähnten natürlichen Verdoppelung der isotropen Invarianten sich in ihrem Umfange vervierfachen müßte, wollte man sie konsequent ausbauen. Einige wichtige und interessante Punkte dieser Dualität sind aber doch zur Sprache gekommen. Ich erwähne hier die Dualisierung der Kurventheorie, die bis zur Berechnung der sogenannten Biegung der Zylinder getrieben wurde, ferner die Herleitung der isotropen Gegenstücke der zu den Sätzen von Euler und Meusnier dualen Theoreme von Blaschke und Mannheim.

Stärker als sonst üblich mußte der Abschnitt über die isotropen Krümmungslinien der Flächen ausfallen. Hier galt es vor allem auch die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller herzustellen und auf mannigfache Zusammenhänge mit vorhandener Literatur

[3]) K. Strubecker, a) Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine u. angew. Math. **178** (1938), S. 135—173. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinigung **48** (1938), S. 236—257. — c) Über die Eulersche Transformation. Comptes rendus instit. sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150—155. — Vgl. ferner die Arbeiten I[1]) und II[2]) dieser Reihe. — Über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit habe ich im März 1941 auch in *Hamburg* und *Wien* vorgetragen.

einzugehen. In der Tat sind die Kurven, denen in meiner Auffassung die Rolle der isotropen Krümmungslinien zukommt, von verschiedenen Autoren, wie A. Ribaucour, J. Eiesland, É. Turrière, E. Müller, und unter den verschiedensten (nichtisotropen) Gesichtspunkten studiert worden.

Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie weisen zum Teil, nämlich im Hinblick auf das Theorema egregium und die Codazzi-Mainardischen Gleichungen die vom euklidischen Falle her bekannte formale Struktur auf. Diese Ähnlichkeit entfällt jedoch vollkommen bei den nach Weingarten bezeichneten Gleichungen. Das hängt mit dem Umstande zusammen, daß im isotropen Raume alle Flächennormalen untereinander parallel, nämlich vollisotrop, d. h. z-parallel sind. Das zwingt, zur Festlegung der Stellung einer Tangentialebene zu Bivektoren zu greifen.

Ein Kapitel über sphärische Abbildung leitet über zu einem wieder durch seine großen Abweichungen vom gewohnten euklidischen Falle interessanten Abschnitt über die Minimalflächen des isotropen Raumes. Hier muß man, um diese Flächen überhaupt durch ein sinnvolles Variationsproblem definieren und sie mit den Flächen verschwindender isotroper mittlerer Krümmung

$$(\dagger) \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\,\Delta z = \frac{1}{2}\,(r + t)$$

identifizieren zu können, zu Minkowskis Begriff der Relativoberfläche (hinsichtlich einer isotropen Kugel als Eichfläche) greifen. *Dabei ist es bemerkenswert, daß diese etwa durch die Formel*

$$(\dagger\dagger) \qquad O^* = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla z\, dx\, dy = \tfrac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} (p^2 + q^2)\, dx\, dy$$

erklärbare Relativoberfläche O^* eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ zwar an sich nicht invariant ist (gegenüber Bewegungen des isotropen Raumes), daß aber wohl den Extremalen des zugehörigen Variationsproblems, d. i. den isotropen Minimalflächen, invarianter Charakter zukommt.

Als isotrope Minimalflächen ergeben sich Flächen einer Klasse, die schon oft wegen ihrer funktionentheoretischen Bedeutung Interesse erregt hat. In der Tat handelt es sich nach (†) um die Integralflächen $z = z(x, y)$ der Laplaceschen Gleichung

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \Delta z(x, y) = 0,$$

die, wie man aus der Funktionentheorie weiß, als Extremalen des Dirichletschen Integrals (††) auftreten. Auch für diese wohl erstmalig vom Standpunkte der (euklidischen) Differentialgeometrie durch U. Dini, und später vollkommener durch K. Kommerell behandelten „Potentialflächen" steht in der Differentialgeometrie des isotropen Raumes ein neues adäquates

Forschungsmittel bereit, das jedoch systematisch erst in einer Fortsetzung dieser Arbeit angewandt werden soll. Hier mußte ich mich damit begnügen, in allgemeiner Darstellung die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Variationsproblems der Relativoberfläche einzuführen und die Notwendigkeit des Verschwindens ihrer mittleren Krümmung abzuleiten. Ihre allgemeine geometrische Theorie, vor allem der Begriff der assoziierten und adjungierten Minimalflächen, die Möglichkeit, sie im isotropen Sinne in einem wohldefinierten und nichttrivialen Sinne aufeinander abzuwickeln, und Ähnliches konnte hier vorerst nur angedeutet werden. Als ein interessantes Beispiel, das die volle Analogie aufzeigen sollte, die mit der euklidischen, so wohl entwickelten Theorie der Minimalflächen besteht, habe ich das isotrope Gegenstück der Enneperschen Minimalflächen und die Schar ihrer Assoziierten als Abschluß der Arbeit in Kürze vorgeführt.

Inhaltsübersicht.

I. Die Geometrie des isotropen Raumes 372
II. Kurventheorie des isotropen Raumes 377
III. Geometrie der Streifen des isotropen Raumes 382
IV. Elemente der Flächentheorie des isotropen Raumes 391
V. Isotrope Krümmungslinien 400
VI. Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie 408
VII. Sphärische Abbildung und Richtungsbild 414
VIII. Die Relativoberfläche. Die isotropen Minimalflächen als ihre Extremalen. Assoziierte Minimalflächen. Die isotrope Enneper-Fläche. 417

I. Die Geometrie des isotropen Raumes [1]).

1. Das absolute Gebilde. Ein Raum (x, y, z) soll isotrop heißen, wenn seine Metrik von einem schneidenden Geradenpaare seiner Fernebene ω

$$\omega \ldots t = 0 \tag{1, 1}$$

reguliert wird. Wir bezeichnen die Fernebene ω als absolute Ebene des isotropen Raumes und wählen als absolutes Geradenpaar die beiden konjugiert-komplexen Ferngeraden (i_1, i_2)

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right| i_1, \qquad \left.\begin{aligned} x - iy &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right| i_2. \tag{1, 2}$$

Ihr Schnittpunkt U ist der Fernpunkt der z-Achse. Wir nennen ihn den absoluten Punkt des isotropen Raumes.

Wegen der selbstdualen Struktur des absoluten Gebildes ist *die Geometrie des isotropen Raumes nach Lage und Maß völlig in sich dual.*

2. Die isotropen Bewegungen. Das absolute Geradenpaar (2) gestattet eine stetige achtgliedrige Gruppe G_8 räumlich-kollinearer Automorphien, die wir als die Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + h_1 x - h_2 y \quad . \\ y' &= b + h_2 x + h_1 y \quad . \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \ldots G_8. \tag{1, 3}$$

Darin ist eine ausgezeichnete Untergruppe G_6 enthalten, deren Transformationen wir als Bewegungen des isotropen Raumes (oder kurz als isotrope Bewegungen) erklären wollen. Ihre Darstellung ist:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y \quad . \\ y' &= b + \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \quad . \\ z' &= c + c_1 x \qquad + c_2 y \qquad + z \end{aligned}\right\} \cdots G_6. \tag{1, 4}$$

Bezeichnen wir die Normalrisse der Raumfiguren auf die (x, y)-Ebene als ihre „Grundrisse", so gilt der Satz:

Die isotropen Bewegungen äußern sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene euklidische Bewegungen[4]).

3. Abstand zweier Punkte und Winkel zweier Ebenen. Man kann im Sinne F. Kleins die Geometrie des isotropen Raumes als die Invariantentheorie seiner Bewegungsgruppe $G_6(4)$ erklären. Dabei ergeben sich die folgenden metrischen Grundinvarianten:

Die *Entfernung d zweier Punkte* $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ ist definiert durch die Formel

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{1, 5}$$

der eine duale Formel für den *Winkel* ϑ *zweier Ebenen* π_α gegenübersteht. Sind nämlich

$$\pi_\alpha \ldots z = u_\alpha x + v_\alpha y + w_\alpha \tag{1, 6}$$

die Gleichungen der Ebenen, so ist für den Winkel ϑ

$$\vartheta^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2. \tag{1, 7}$$

Dabei waren die beiden Punkte P_α als eigentliche vorausgesetzt und (dual) die beiden Ebenen $\pi_\alpha(6)$ als nicht-isotrop, d. h. als nicht z-parallel angenommen.

---

[4]) Allgemeiner kann man die sich aus (3) für $h_1 = \cos\varphi$, $h_2 = \sin\varphi$ ergebenden Transformationen als Bewegungen des isotropen Raumes auffassen. Auch für sie gilt unser Satz; im Gegensatze zu den Bewegungen (4) aber sind die Rauminhalte gegen diese allgemeineren „modularen Bewegungen" nicht invariant.

4. Ersatzinvarianten. *Diese Invarianten d und ϑ können verschwinden, ohne daß die beiden Punkte oder Ebenen identisch wären, nämlich dann, wenn die Punkte und Ebenen parallel sind,* d. h. wenn für ihre Koordinaten

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \tag{1, 8}$$

bzw. dual

$$u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2 \tag{1, 9}$$

gilt. Die Grundrisse der Punkte decken sich dann, und die Ebenen sind im gewöhnlichen Sinne parallel.

In diesen Fällen gibt es als Ersatz andere (rationale) Invarianten, nämlich für die parallelen Punkte (8) ihre Spanne

$$l = z_2 - z_1, \tag{1, 10}$$

und für die parallelen Ebenen (9) ihre Distanz

$$\lambda = w_2 - w_1. \tag{1, 11}$$

5. Winkel zweier Geraden. Nach (5) *kann man den isotropen Abstand zweier Punkte aus ihrem Grundrisse in euklidischer Weise ablesen. Das gleiche gilt auch für den Winkel φ zweier Vektoren.*

Wenn also die Grundrisse der Vektoren

$$\mathfrak{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha), \tag{1, 12}$$

die wir uns im Sinne von (5) als Einheitsvektoren denken, lauten

$$\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha), \tag{1, 13}$$

so gilt für ihren Winkel φ:

$$\begin{cases} \cos\varphi = (\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \\ \sin\varphi = [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{cases} \tag{1, 14}$$

6. Neigung zweier Geraden. Auch diese Invariante φ kann verschwinden, ohne daß die beiden Vektoren identisch wären, nämlich dann, wenn die Grundrißvektoren $\bar{\mathfrak{x}}_\alpha$(13) zusammenfallen und die Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$(12) selbst eine isotrope, d. i. z-parallele Ebene aufspannen. Auch in diesem Falle gibt es wieder eine *Ersatzinvariante*, nämlich die *Neigung* oder *Sperrung* ψ der beiden Vektoren, definiert durch

$$\psi = z_2 - z_1. \tag{1, 15}$$

7. Die vollisotrope Richtung. Nach (14) sind die nach dem absoluten Punkte U des isotropen Raumes zielenden vollisotropen Vektoren

$$\mathfrak{l} = (0, 0, 1) \tag{1, 16}$$

zu allen anderen Vektoren und damit auch zu allen Ebenen normal.

Es werden also im isotropen Raume die zu den Schmiegebenen einer Kurve normalen Binormalen und ebenso die zu den Tangentialebenen einer Fläche normalen Flächennormalen sämtlich zueinander parallel, nämlich vollisotrop sein.

8. Neigung einer Geraden gegen eine Ebene. Die isotropen Invarianten aller anderen Elementenpaare können aus den bisher erklärten unschwer abgeleitet werden.

Eine (nicht isotrope) Ebene π und eine sie schneidende (nicht vollisotrope) Gerade g z. B. bestimmen eine Bewegungsinvariante, ihre Neigung. Legt man nämlich durch die Gerade g die isotrope Ebene γ, so schneidet sie die Ebene π nach einer zweiten Geraden p. Die nach (15) erklärte Neigung von g und p ist die gesuchte Neigung der Geraden g gegen die Ebene π.

Dual hierzu wäre der Abstand eines (eigentlichen) Punktes P von einer Geraden g. Er äußert sich als euklidischer Abstand der Grundrisse dieser beiden Figuren.

In beiden Fällen sind wieder Grenzlagen möglich, die auf einfache Ersatzinvarianten führen.

9. Die metrische Dualität als Nullsystem oder Polarität. Durch das Nullsystem $\mathfrak{N}$

(1, 17) $$z - Z = Xy - Yx$$

des Gewindes $\mathfrak{G}$

(1, 18) $$dz = x\,dy - y\,dx$$

(und die dazu im Sinne der isotropen Raumgeometrie kongruenten Nullsysteme) werden die metrischen Größen dual gepaart. Der Winkel zweier Ebenen ist also gleich dem Abstande ihrer Nullpunkte usw. Damit können einfache geometrische Deutungen der isotropen Metrik gewonnen werden.

Gleiches gilt, wenn man vom Vorzeichen bei der Spanne paralleler Punkte, Ebenen usw. absieht, für die Polaritäten der beiden Drehparaboloide

(1, 19) $$z = \pm \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

und ihrer Kongruenten, die wir als die Einheitskugeln des isotropen Raumes bezeichnen können.

10. Isotrope Kugeln, Kreise und Drehkegel. Allgemein werden wir nämlich als isotrope Kugeln die regulären Flächen zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (2) erklären, also die Drehparaboloide mit vollisotroper Durchmesserrichtung der Form

(1, 20) $$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D.$$

Ihre ebenen Schnitte liefern die Kreise des isotropen Raumes. Es sind das für nicht-isotrope Schnittebenen Ellipsen mit kreisförmigen Grund-

rissen, für isotrope Schnittebenen aber Parabeln mit vollisotroper Durchmesserrichtung, sogenannte parabolische Kreise.

Dual dazu sind die Tangentenkegel der isotropen Kugeln im isotropen Raume als Drehkegel aufzufassen. Wie die Kreise gestatten sie eine eingliedrige isotrope Drehungsgruppe um eine vollisotrope Achse. Sie tragen eine einzige Schar von isotropen Kreisen. Diese liegen in parallelen Ebenen. Darunter kommt auch der Berührungskreis mit der Kugel vor. Ihre Erzeugenden sind gegen diese Ebenen gleich-geneigt. Die Fernebene insbesondere schneidet die Drehkegel nach sogenannten Fernkreisen, d. h. nach Kegelschnitten, welche die beiden absoluten Geraden (2) berühren. Die Berührungssehne soll als Achse des Fernkreises bezeichnet werden.

11. Die Geometrie der nichtisotropen Ebenen. Die in einer beliebigen nicht-isotropen Ebene durch die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (4) induzierte Geometrie fällt mit jener parabolischen Geometrie zusammen, welche sich auf die beiden konjugiert komplexen Schnittpunkte der Ebene mit dem Paare der absoluten Geraden (2) stützt. Sie ist im Grundrisse mit der gewöhnlichen euklidischen Geometrie identisch.

Die Differentialgeometrie einer ebenen Kurve wird also, falls die Kurvenebene nicht-isotrop ist, identisch sein mit der gewöhnlichen euklidischen Differentialgeometrie des Kurvengrundrisses. Ihre Invarianten, wie die Bogenlänge s oder die Krümmung $\varkappa$ der Kurve können direkt ihrem Grundrisse entnommen werden.

12. Die Geometrie der isotropen Ebenen[5]**.** Von ganz neuartigem Charakter ist aber jene Geometrie, welche durch unsere Bewegungsgruppe G_6 (4) in einer isotropen Ebene hervorgerufen wird. Wegen der Bewegungsinvarianz der Begriffe genügt es, nur die isotrope Ebene

$$y = 0 \tag{1, 21}$$

zu studieren. In ihr wird durch G_6 eine dreigliedrige Gruppe G_3 von sogenannten Grenzbewegungen induziert, der Darstellung:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ z' &= c + c_1 x + z \end{aligned}\right\} \cdots G_3. \tag{1, 22}$$

Ihre metrischen Grundinvarianten, nämlich den (im Grundrisse ablesbaren) Abstand zweier Punkte und die Neigung zweier Geraden kennen wir schon aus den Nrn. 3 und 6. Das invariante Bogenelement der isotropen Ebene (21) ist

$$ds = dx. \tag{1, 23}$$

[5]) Vgl. H. Beck, Zur Geometrie der Minimalebene. Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges. 12 (1912), S. 14–30.

13. Abweichung und Normalkrümmung. *Die Krümmung $\varkappa$ einer Kurve*

(1, 24) $$z = f(x)$$

der isotropen Ebene (21) *verschwindet* wegen ihres geradlinigen Grundrisses. Als Ersatz tritt an ihre Stelle die sogenannte *Abweichung* $\varkappa^*$ der Kurve, nämlich der Quotient aus Kontingenzsperrung der Tangenten und Bogenelement, d. i. der Ausdruck

(1, 25) $$\varkappa^* = \lim_{dx \to 0} \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} = f''(x).$$

Durch Vorgabe dieser Krümmungsinvariante als Funktion des Bogens

(1, 26) $$\varkappa^* = \varkappa^*(s)$$

ist die Kurve der isotropen Ebene bis auf ihre Lage, d. i. bis auf Grenzbewegungen aus G_3 (22) *bestimmt.*

Insbesondere sind die Kurvenfester Abweichung die parabolischen Kreise. Sie gestatten, ähnlich den gewöhnlichen Kreisen, eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen aus G_3 in sich.

Aus Gründen der Permanenz der euklidischen Terminologie werden wir insbesondere in der Flächentheorie die Abweichung einer Kurve der isotropen Ebene gerne auch als ihre Normalkrümmung und ihren Reziprokwert

(1, 27) $$R = \frac{1}{\varkappa^*}$$

als den Radius der Normalkrümmung bezeichnen.

Man hat dann z. B. die folgende einfache geometrische Deutung: Der Radius R der Normalkrümmung der Kurve (24) *in einer isotropen Ebene ist gleich dem (elementaren, aber auch gegen die isotropen Bewegungen aus G_3 invarianten) Parameter des parabolischen Kreises, welcher die Kurve* (24) *an der betrachteten Stelle oskuliert.*

II. Kurventheorie des isotropen Raumes[1]).

14. Bogenelement. Nach (1, 5) ist das invariante Bogenelement ds des isotropen Raumes bestimmt durch die quadratische Differentialform des Ranges zwei

(2, 1) $$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Man kann also die Länge einer Raum- oder Flächenkurve direkt aus dem Grundriß ablesen.

15. Krümmung und Windung. Es sei nun

$$\mathfrak{x}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \tag{2, 2}$$

eine bereits laut (1) auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve und

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \{x(s), y(s)\} \tag{2, 3}$$

ihr „Grundrißvektor".

Die Raumkurve hat dann hinsichtlich der Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes zwei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich ihre Krümmung $\varkappa$, die man durch eine Verabredung sogar rational ausdrücken kann durch

$$\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\,\bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{2, 4}$$

und *die man direkt aus dem Grundrisse der Kurve (als dessen gewöhnliche Krümmung) ablesen kann*, und weiter ihre Windung oder Torsion τ, definiert durch

$$\tau = \frac{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{x}''']}{[\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\left|\begin{matrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{matrix}\right|^2}. \tag{2, 5}$$

16. Begleitendes Dreibein. Frenetsche Formeln. Man kann mit der Raumkurve (2) invariant gegen isotrope Bewegungen ein begleitendes Dreibein verbinden, bestehend aus

1) dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{2, 6}$$

der (im Sinne der isotropen Metrik) ein Einheitsvektor ist,

2) dem dazu normalen und in der Schmiegebene enthaltenen Hauptnormalenvektor $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}''(s), \tag{2 7}$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen Binormalenvektor $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1), \tag{2, 8}$$

der vollisotrop und von der Spanne Eins ist.

Für sie gilt als Analogon der Frenetschen Formeln das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \quad . \quad \varkappa\mathfrak{h} \quad . \\ \mathfrak{h}' &= -\varkappa\mathfrak{t} \quad . \quad +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \quad . \quad 0 \quad . \end{aligned}\right\}. \tag{2, 9}$$

17. Kurven in isotropen Ebenen. Das begleitende Dreibein fehlt an solchen Stellen der Kurve, wo $\varkappa = 0$ ist. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist dies reell nur dadurch möglich, daß der Vektor $\mathfrak{x}''$, der Hauptnormalenrichtung hat, vollisotrop ist, d. h.

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b} \tag{2, 10}$$

ist. Liegt dann kein Wendepunkt vor, d. h. ist $z'' \neq 0$, so ist die Schmiegebene an dieser Stelle isotrop.

Die Gleichung

$$\varkappa(s) \equiv 0 \tag{2, 11}$$

kennzeichnet danach die Kurven in isotropen Ebenen, deren Krümmungsinvariante nach Nr. **13** und (1, 25) die Größe

$$\varkappa^*(s) = z''(s) \tag{2, 12}$$

ist, welche als Abweichung oder Normalkrümmung der Kurve bezeichnet wurde.

Kurvenstellen mit vollisotropen Tangenten sind auszuschließen. Ebenso solche (komplexe) Stellen, deren Tangente isotrop ist, d. h. isotropen Grundriß hat.

18. Natürliche Gleichungen. Die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{2, 13}$$

bestimmen, falls $\varkappa(s) \neq 0$ ist, eine Raumkurve ihrer Gestalt nach, d. h. bis auf Bewegungen des isotropen Raumes. Insbesondere kennzeichnet so

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{2, 14}$$

die Kurven in nichtisotropen Ebenen.

Ist jedoch $\varkappa(s) \equiv 0$, so liegt, wie erwähnt, die Kurve in einer isotropen Ebene, und zu ihrer Festlegung (bis auf isotrope Bewegungen) dient die neue natürliche Gleichung

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s). \tag{2, 15}$$

19. Schraublinien und Kreise. Als einfache Beispiele erwähnen wir die Schraublinien des isotropen Raumes. Ihre Krümmung und Windung sind konstant:

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0; \tag{2, 16}$$

ihre Grundrisse sind Kreise der Krümmung $\varkappa_0$.

Für $\tau_0 = 0$ entstehen daraus die Kreise in nicht-isotropen Ebenen, das sind Ellipsen mit kreisförmigem Grundrisse.

Für die in isotropen Ebenen enthaltenen parabolischen Kreise ist

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = \varkappa_0^* = \text{const.} \neq 0. \tag{2, 17}$$

Wie schon in Nr. 13 erwähnt wurde, ist der Normalkrümmungsradius R eines parabolischen Kreises gleich seinem elementargeometrischen Parameter p, d. h.

$$R = \frac{1}{\varkappa^*} = p. \tag{2, 18}$$

Für

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa_0^* = 0 \tag{2, 19}$$

ergeben sich schließlich die (weder isotropen noch vollisotropen) Geraden.

20. Die isotrope Geometrie der Ebenenscharen. Wir beenden diese Zusammenstellung mit der Bemerkung, daß sich der Theorie der Raumkurven vermöge der metrischen Dualität des isotropen Raumes eine formal völlig gleichartige Theorie der Ebenenscharen (Torsen) an die Seite stellen läßt.

Sind nämlich die Koordinaten (u, v, w) einer Ebene

$$z = ux + vy + w \tag{2, 20}$$

Funktionen eines willkürlichen Parameters t

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t), \\ w &= w(t), \end{aligned}\right\} \cdots \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(t). \tag{2, 21}$$

so läßt sich (dual zum Bogen einer Raumkurve) dieser Ebenenschar (Torse) im isotropen Raume ein *invarianter (natürlicher) Parameter* ϑ zuordnen, den man als ihren *konischen Winkel* bezeichnen könnte. Nach Formel (1, 7) hat man für ihn mit einer zur früheren analogen Bezeichnung:

$$d\vartheta^2 = du^2 + dv^2 = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)\, dt^2 = \dot{\mathfrak{U}}^2(t)\, dt^2. \tag{2, 22}$$

Dual zur Krümmung und Torsion der Raumkurve besitzt auch die Ebenenschar $\mathfrak{U}(\vartheta)$, die wir uns auf den natürlichen Parameter ϑ bezogen denken, *zwei elementare Differentialinvarianten zweiter und dritter Ordnung*, nämlich

$$\left.\begin{aligned} K &= [\bar{\mathfrak{U}}', \bar{\mathfrak{U}}''] = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}, \\ T &= \frac{[\mathfrak{U}', \mathfrak{U}'', \mathfrak{U}''']}{[\bar{\mathfrak{U}}', \bar{\mathfrak{U}}'']^2}. \end{aligned}\right. \tag{2, 23}$$

Diese Größen hängen natürlich in einfacher Weise mit Bogen s, Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ der Gratlinie $\mathfrak{x}(s)$ der Ebenenschar zusammen. Man hat:

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= \tau\, ds, \\ K &= \frac{\varkappa}{\tau}, \qquad T = \frac{1}{\tau}. \end{aligned}\right. \tag{2, 24}$$

K ist also, mit einer von J. Plücker stammenden Bezeichnung, die sogenannte *konische Krümmung* der Torse.

21. Die Biegung zylindrischer Ebenenscharen. Wie die Krümmung $\varkappa$ einer Raumkurve, *kann auch diese konische Krümmung K durch identisches Verschwinden als Invariante versagen.* Die Ebenen der Schar umhüllen dann einen Zylinder, dessen Erzeugendenrichtung nicht-vollisotrop (im komplexen auch nicht isotrop) ist. Es gibt in diesem Falle (der dual ist zu den Kurven in isotropen Ebenen) wieder eine einfache *Ersatzinvariante*, nämlich die Größe

$$K^* = \frac{d^2 w(\vartheta)}{d\vartheta^2} = w''(\vartheta). \tag{2,25}$$

Wir bezeichnen diese (zur Abweichung $\varkappa^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ duale) Invariante als die *„Biegung" des Zylinders* und nennen ihren Kehrwert

$$\Re = \frac{1}{K^*} \tag{2,26}$$

seinen *„Biegungsradius"*.

Als einfache Anwendung bestimmen wir *die Biegung der (parabolischen) Zylinder, die sich der isotropen Kugel*

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) \tag{2,27}$$

vom Parameter p umschreiben lassen.

Wegen der isotropen Beweglichkeit der Kugel in sich ist diese Biegung für alle umschriebenen Zylinder vom gleichen konstanten Wert. Es genügt daher, einen einzigen Zylinder zu nehmen.

Zunächst ist

$$p(u^2 + v^2) + 2w = 0 \tag{2,28}$$

die Ebenengleichung der Kugel (27). Zusammen mit $v = 0$, der Ebenengleichung des Fernpunktes der y-Achse, gibt sie den in y-Richtung umschriebenen Zylinder. Dessen Parameterdarstellung kann also lauten:

$$\mathfrak{U}(t) \ldots u = t, \qquad v = 0, \qquad w = -\frac{p}{2}t^2. \tag{2,29}$$

Für ihn erhalten wir aus Formel (22) zunächst den natürlichen Parameter ϑ. Man findet einfach

$$\vartheta = t. \tag{2,30}$$

Daher liefert (25) für die Biegung den festen Wert

$$K^* = \frac{1}{\Re} = -p. \tag{2,31}$$

Also gilt der Satz:

Die Biegungen $K^* = \frac{1}{\mathfrak{R}}$ *aller einer isotropen Kugel vom Parameter* p *umschriebenen Zylinder sind konstant, nämlich gleich dem negativen Parameter.*

III. Geometrie der Streifen des isotropen Raumes.

22. Die Streifennormale. Die auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = \{x(s),\ y(s),\ z(s)\} \tag{3, 1}$$

und eine sie begleitende nicht isotrope Berührungsebene π bestimmen einen *Streifen* des isotropen Raumes. Wir denken uns die *Streifenebene* π aufgespannt durch den (nichtisotropen) Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ der Raumkurve

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{3, 2}$$

der ein Einheitsvektor ist:

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = 1, \tag{3, 3}$$

und durch einen dazu normalen Einheitsvektor

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) = \{\xi(s),\ \eta(s),\ \zeta(s)\},\quad \bar{\mathfrak{y}}^2 = 1, \tag{3, 4}$$

der gleichfalls nicht isotrop (also auch nicht vollisotrop) ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{y}$ als den *Normalvektor des Streifens*; und nehmen an, daß sein Grundriß $\bar{\mathfrak{y}}$ aus dem Grundrisse $\bar{\mathfrak{t}}$ des Tangentenvektors $\mathfrak{t}$ durch positive Vierteldrehung hervorgehe. Seine Trägerin heißt auch Streifennormale.

23. Natürliche Gleichungen. Wenn dann die *Schmiegebene* σ *der Raumkurve nicht isotrop* ist, d. h. ihre Krümmung

$$\boxed{\varkappa \neq 0} \tag{3, 5}$$

ist und *die Raumkurve* (1) *also auch keiner isotropen Ebene angehört*, wird auch ihre Hauptnormale

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{x}'' \tag{3, 6}$$

nicht vollisotrop sein und sich im Grundriß mit der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ decken. Die Vektortripel $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{b}$ sind dann linear unabhängig und es ist

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}] = +1. \tag{3, 7}$$

Die Vektoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{y}$ unterscheiden sich dabei nur um einen vollisotropen Vektor, so daß etwa gilt:

$$\boxed{\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta(s) \cdot \mathfrak{b}}. \tag{3, 8}$$

Die Größe $\vartheta(s)$ ist eine isotrope Invariante des Streifens und bedeutet geometrisch den (nach Nr. 3 definierten) Winkel, unter dem die Schmiegebene σ gegen die Streifenebene π der Kurve geneigt ist.

Ist für die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *die Krümmung* $\varkappa(s) \neq 0$, *so ist durch die Gleichungen*

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 9}$$

der Streifen und seine Lage im isotropen Raume eindeutig bestimmt. Durch seine drei Invarianten, d. h. durch die drei natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s), \quad \vartheta = \vartheta(s) \tag{3, 10}$$

ist der Streifen bis auf seine Lage, d. i. bis auf isotrope Bewegungen festgelegt.

24. Ableitungsgleichungen. Man kann mit dem Streifen ein bewegungsinvariantes begleitendes Dreibein verknüpfen, bestehend aus der Kurventangente $\mathfrak{t}$, der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ und der vollisotropen Binormalen $\mathfrak{b}$. Man hat dann nach den Frenetschen Formeln (2, 9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa \mathfrak{y} = \varkappa(\mathfrak{y} + \vartheta \mathfrak{b}), \\ \mathfrak{y}' &= \mathfrak{y}' - \vartheta' \mathfrak{b} = -\varkappa \mathfrak{t} + (\tau - \vartheta') \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{b}' &= \mathfrak{o}, \end{aligned}$$

und erhält insgesamt das folgende System von Ableitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} \mathfrak{t}' = & \cdot & \varkappa \mathfrak{y} & + & \varkappa \vartheta \mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' = & -\varkappa \mathfrak{t} & \cdot & + & (\tau - \vartheta') \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & \cdot & \mathfrak{o} & & \cdot \end{array}} \tag{3, 11}$$

25. Die Invarianten des Streifens. Geodätische Streifen. Die drei hier auftretenden Koeffizienten liefern ein zu (10) *äquivalentes System von Invarianten des Streifens*, nämlich seine

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textit{Geodätische Windung:} & a = \tau - \vartheta', \\ \textit{Normalkrümmung:} & b = \varkappa \vartheta, \\ \textit{Geodätische Krümmung:} & c = \varkappa. \end{array} \right. \tag{3, 12}$$

Durch Angabe von

$$a = a(s), \quad b = b(s), \quad c = c(s) \tag{3, 13}$$

als neuem System natürlicher Gleichungen ist der Streifen wieder bis auf seine Lage bestimmt.

Die geodätische Krümmung c des Streifens ist nach (12) *gleich der isotropen Krümmung der Streifenkurve, d. h. gleich der gewöhnlichen Krümmung des Kurvengrundrisses.*

Nach (3, 5) ist die geodätische Krümmung zunächst von Null verschieden genommen. Ihr *Verschwinden* kennzeichnet die sogenannten *geodätischen Streifen*, d. h. jene, deren Streifenkurve einer *isotropen Ebene* angehört. Deren *Grundriß* ist *geradlinig*, sie selbst sind also wirklich für das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes für den Streifen *geodätische Linien.*

26. Die Erzeugende der Torse des Streifens. Ist $\mathfrak{z}$ der Ortsvektor eines laufenden Punktes der Berührungsebene des Streifens, so kann ein Vektor $\mathfrak{e}$ der *Erzeugenden der Torse des Streifens* jedenfalls in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{z} - \mathfrak{x} = \alpha\,\mathfrak{t} + \beta\,\mathfrak{y}. \tag{3, 14}$$

Wir bezeichnen diese Tangente $\mathfrak{e}$ des Streifens als seine zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ konjugierte Tangente. Sie liegt in der Tangentialebene π mit der Gleichung

$$\pi \ldots [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = 0 \tag{3, 15}$$

und ist ihr Schnitt mit der Nachbarebene, so daß auch die Gleichung

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{y}] = 0 \tag{3, 16}$$

erfüllt ist. Die Ableitungsgleichungen (11) geben zusammen mit (8) dafür:

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, \mathfrak{y}] = [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \varkappa\,\mathfrak{b}, -\vartheta\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{z} - \mathfrak{x}, \mathfrak{t}, a\,\mathfrak{b}] = 0, \tag{3, 17}$$

woraus man im Verein mit (15) unter Beachtung von (14), (8) und (12) für α und β die Gleichung

$$(\alpha\,b + \beta a)\,[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}] = 0$$

erhält, aus der man mittels (7) das einfache Ergebnis folgert:

$$\alpha = a, \quad \beta = -b. \tag{3, 18}$$

Damit ist die Erzeugende $\mathfrak{e}$ *der Torse des Streifens, oder die zur Kurventangente* $\mathfrak{t}$ *konjugierte Streifentangente gegeben durch den Vektor*

$$\boxed{\mathfrak{e} = a\,\mathfrak{t} - b\,\mathfrak{y}}. \tag{3, 19}$$

27. Krümmungs- und Schmiegstreifen. Aus dieser Formel kann man sofort die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Invarianten a und b entnehmen. Es gilt:

$a \equiv 0$ *ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die konjugierten Tangentenpaare* $\mathfrak{t}$ *(Kurventangente) und* $\mathfrak{e}$ *(Erzeugende des Streifens) zueinander normal sind. Der Streifen wird dann als ein Krümmungsstreifen des isotropen Raumes bezeichnet.*

$b \equiv 0$ *aber ist notwendig und hinreichend dafür, daß die konjugierten Tangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zusammenfallen. Der Streifen ist dann ein Schmiegstreifen.*

Man beachte dabei, daß seit (5) immer $\varkappa \neq 0$ angenommen war. Der Streifen sollte also nach Nr. **23** kein geodätischer sein, d. h. seine Kurve (1) nicht einer isotropen Ebene angehören.

Man ergänzt aber aus seiner Definition leicht, daß *ein solcher geodätischer Streifen stets dann und auch nur dann ein Krümmungsstreifen ist, wenn er zylindrisch ist und seine Erzeugenden normal (d. h. im Grundriß normal) sind zu der isotropen Ebene, der seine Trägerkurve angehört.*

Ferner ist ein geodätischer Streifen ersichtlich dann und nur dann ein Schmiegstreifen, wenn er geradlinig ist.

28. Neue Darstellung der Streifeninvarianten. Aus den Ableitungsgleichungen (11) erhält man die folgenden *Darstellungen der drei Streifeninvarianten* a, b, c:

$$\text{(3, 20)} \qquad \begin{cases} a = & [\mathfrak{x}', \mathfrak{y}, \mathfrak{y}'], \\ b = -& [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{y}], \\ c = & [\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Wir wollen mit ihrer Hilfe die wichtigen *geometrischen Bedeutungen von a und b* angeben. Die Deutung der geodätischen Krümmung c ist uns aus Nr. **23** schon bekannt.

29. Erste Deutung der Normalkrümmung. *Um eine erste geometrische Deutung der Normalkrümmung b zu erhalten, projizieren wir die Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}$ (8) des Kurvenpunktes s_0 auf die $\mathfrak{x}$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ.* Ist $\mathfrak{z}(s)$ der Ortsvektor dieser Projektion, so ist $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ einerseits als Vektor der in $\mathfrak{x}_0$ berührenden isotropen Ebene γ darstellbar in der Form

$$\text{(3, 21)} \qquad \mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b};$$

andererseits hat man laut Konstruktion von $\mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0$ als Projektion von $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung von $\mathfrak{y}$

$$\text{(3, 22)} \qquad \mathfrak{z} - \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - C\mathfrak{y}_0.$$

Durch Vergleich der rechten Seiten dieser Darstellungen (21) und (22) folgt wegen (8)

$$\text{(3, 23)} \qquad \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 = A\mathfrak{t}_0 + B\mathfrak{b} + C(\mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}),$$

d. h. A, B, C sind die Koordinaten der Zerlegung des Vektors $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$ in Richtung der Vektoren $\mathfrak{t}_0$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}$. Also ist wegen (7)

$$\text{(3, 24)} \qquad \begin{cases} A = & [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}], \\ B = & [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}], \\ C = -& [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{b}]. \end{cases}$$

Die gesuchte Projektion $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{x}$ auf die berührende isotrope Ebene γ lautet daher nach (21) oder (22)

$$\text{(3, 25)} \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}.$$

Von dieser Kurve $\mathfrak{z}(s)$ der isotropen Ebene γ wollen wir nun an der Stelle s_0 die Abweichung $\varkappa_0^*$ oder Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ berechnen. Es ist nach (1, 26) und (1, 27) wegen der Gleichheit der Bogenelemente ds und $d\sigma$ der Kurven $\mathfrak{x}(s)$ und $\mathfrak{z}(s)$ an der Berührungsstelle s_0

$$\varkappa_0^* = \frac{1}{R} = Z''(s_0), \tag{3, 26}$$

wenn $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ die Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{z}(s)$ sind.

Man hat zunächst aus (25)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}' &= [\mathfrak{x}', \mathfrak{y}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{y}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{z}'' &= [\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}_0, \mathfrak{b}]\,\mathfrak{t}_0 + [\mathfrak{x}'', \mathfrak{t}_0, \mathfrak{y}_0 - \vartheta_0\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \tag{3, 27}$$

und erhält für die Stelle $s = s_0$ wegen (6) und (7)

$$\mathfrak{z}'' = \varkappa_0\vartheta_0\mathfrak{b}. \tag{3, 28}$$

Also ist

$$Z''(s_0) = \varkappa_0\vartheta_0 \tag{3, 29}$$

und für die gesuchte Abweichung oder Normalkrümmung von $\mathfrak{z}(s)$ ergibt sich nach (12) und (26):

$$\varkappa_0^* = \frac{1}{R} = \varkappa_0\,\vartheta_0 = b. \tag{3, 30}$$

30. Zusammenfassend haben wir also folgende erste Deutung der Normalkrümmung des Streifens:

Projiziert man die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens in der Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}_0$ des Kurvenpunktes $\mathfrak{x}(s_0)$ auf die isotrope Ebene γ, welche die Kurve $\mathfrak{x}$ im Punkte s_0 berührt, so ist die Normalkrümmung (= Abweichung) $\varkappa_0^* = \frac{1}{R}$ der entstehenden Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0 gleich der Normalkrümmung b des Streifens in s_0.

Für den Kehrwert

$$R = \frac{1}{b}, \tag{3, 31}$$

d. h. für den Radius der Normalkrümmung des Streifens ergibt sich aus Nr. **13** eine einfache geometrische Deutung: *R ist gleich dem Parameter des parabolischen Schmiegkreises der eben genannten Projektion $\mathfrak{z}(s)$ im Punkte s_0.*

31. Zweite Deutung der Normalkrümmung, Meusniersche Kugel. Es gibt noch eine *zweite geometrische Deutung für die Normalkrümmung b eines Streifens*, die für uns gleichfalls von Wichtigkeit ist. Um sie direkt zu gewinnen, berechnen wir den (gegen isotrope Bewegungen invarianten) Parameter p jener isotropen Berührungskugel des Streifens, welche im

Punkte s_0 die Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens oskuliert. Wir bezeichnen sie kurz als die isotrope Meusnier-Kugel des Streifens an der Stelle s_0.

Wir suchen also (Nr. 10) die isotrope Kugel

$$(3,32)\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(z-z_0)=0,$$

welche schon den Punkt $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}(s_0)$ enthält und die man mittels des Hilfsvektors

$$(3,33)\qquad \mathfrak{u}=(u,v,w)$$

kürzer so schreiben kann:

$$(3,34)\qquad (\bar{\mathfrak{x}}-\bar{\mathfrak{x}}_0)^2+\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)=0,$$

so einzurichten, daß sie die Kurve $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$ im Punkte s_0 oskuliert.

Die Kugelgleichung (32) soll also durch die Taylor-Entwicklung der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bei s_0

$$(3,35)\qquad \mathfrak{x}(s_0+ds)=\mathfrak{x}_0+\mathfrak{x}_0'ds+\frac{\mathfrak{x}_0''}{2!}ds^2+\cdots$$

bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung in ds identisch erfüllt werden. Somit ist

$$(3,36)\qquad \begin{cases}\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0'=0,\\ \bar{\mathfrak{x}}_0'^2+\frac{1}{2}\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''=0.\end{cases}$$

Wegen $\bar{\mathfrak{x}}_0'^2=1$ ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$(3,37)\qquad \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''=-2.$$

Soll die Oskulationskugel noch weiter den Streifen berühren, so muß die Streifennormale von s_0, d. i. die Gerade

$$(3,38)\qquad \mathfrak{x}^*=\mathfrak{x}_0+\lambda\mathfrak{y}_0$$

mit ihr zwei zusammenfallende Schnittpunkte haben. Wenn wir also dies $\mathfrak{x}^*$ an Stelle von $\mathfrak{x}$ in (34) eintragen, so muß die entstehende quadratische Gleichung

$$\lambda^2\bar{\mathfrak{y}}^2+\lambda(\mathfrak{u}\mathfrak{y}_0)=0$$

die Doppelwurzel $\lambda=0$ aufweisen. Somit ist also

$$(3,39)\qquad \mathfrak{u}\mathfrak{y}_0=0.$$

Tragen wir hier für $\mathfrak{y}_0$ seine Bedeutung (8) ein, so entsteht die Gleichung

$$\mathfrak{u}\cdot(\mathfrak{h}_0-\vartheta_0\mathfrak{b})=\mathfrak{u}\cdot\left(\frac{\mathfrak{x}_0''}{\varkappa_0}-\vartheta_0\mathfrak{b}\right)=0,$$

oder, da $\varkappa_0\neq 0$ war, die Gleichung

$$(3,40)\qquad \mathfrak{u}\cdot\mathfrak{x}_0''-\varkappa_0\vartheta_0(\mathfrak{u}\mathfrak{b})=0.$$

Nun ist nach (33) $(\mathfrak{u}\mathfrak{b})=w$ und daher schließlich wegen (37)

$$(3,41)\qquad \varkappa_0\vartheta_0 w=-2.$$

Beachtet man jetzt die Gleichung (30) für den Normalkrümmungsradius R und die Tatsache, daß die isotrope Kugel (32) den Parameter

$$p = -\frac{w}{2} \tag{3, 42}$$

hat, so folgt das einfache Ergebnis

$$R = p. \tag{3, 43}$$

32. Zusammenfassend gewinnen wir also die folgende zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens:

Der Radius R der Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ eines Streifens des isotropen Raumes ist gleich dem Parameter p seiner Meusnier-Kugel, d. h. jener isotropen Kugel, welche den Streifen berührt und dabei die Trägerkurve $\mathfrak{x}$ des Streifens oskuliert.

33. Zusammenhang beider Deutungen. Dritte Deutung der Normalkrümmung. Um den *Zusammenhang zwischen unseren beiden Deutungen der Normalkrümmung eines Streifens* herzustellen, bemerken wir, daß (Nr. **13**) der Parameter p einer isotropen Kugel gleich ist den Normalkrümmungsradien R aller auf ihr liegenden parabolischen Kreise. Greift man also auf der Meusnier-Kugel des Streifens jenen parabolischen Kreis heraus, der seine Trägerkurve $\mathfrak{x}(s)$ berührt, so ist auch sein Parameter p gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens. Nun überzeugt man sich sofort, daß dieser parabolische Berührungskreis mit dem Schmiegkreis der Projektion $\mathfrak{z}(s)$ der Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ in Richtung der Streifennormalen $\mathfrak{y}(s_0)$ auf die $\mathfrak{x}(s)$ in s_0 berührende isotrope Ebene γ zusammenfällt, so daß in der Tat die zweite Deutung der Normalkrümmung eines Streifens auf die erste zurückführt.

Zugleich folgt aus diesem Zusammenhange eine dritte wichtige Deutung für die Normalkrümmung eines Streifens: *Schneidet man die Torse des Streifens mit der isotropen Berührungsebene der Streifenkurve, so liegt der parabolische Schmiegkreis der entstehenden Schnittkurve auf der Meusnier-Kugel. Der Parameter p des parabolischen Schmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R des Streifens.*

Man kann das natürlich auch direkt, etwa mit Hilfe der kanonischen Entwicklung der Raumkurve nachweisen.

34. Die Deutung der geodätischen Windung. Nachdem die geodätische Krümmung c und die Normalkrümmung b eines Streifens des isotropen Raumes ihre geometrischen Deutungen gefunden haben, ist es noch unsere Aufgabe, auch für seine geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eine elementare Deutung zu ermitteln.

Wir betrachten hierzu die von den Streifennormalen (Nr. 22) gebildete Regelfläche. Deren Darstellung ist

(3, 44) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}(s) + t \cdot \mathfrak{y}(s).$$

Zwei Nachbarerzeugende $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ bestimmen einen Winkel $d\lambda$ (der im Grundriß direkt ablesbar ist) und eine auf ihrer vollisotropen Transversalen, d. h. auf ihrem „Gemeinlot", ablesbare Lotspanne dl. Wir suchen den „Drall" p

(3, 45) $$p = \frac{dl}{d\lambda}$$

der Regelfläche zu berechnen.

35. Das Gemeinlot trifft die Erzeugende $\mathfrak{z}$ (44) an jener Stelle t, wo sich die Nachbarerzeugende $\mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ von ihr nur um einen vollisotropen Vektor $d\mathfrak{z}$ unterscheidet. Nun ist der Vektor $d\mathfrak{z}$ nach (44) und den Ableitungsgleichungen (11)

(3, 46) $$\begin{aligned} d\mathfrak{z} &= (\mathfrak{x}' + t\mathfrak{y}')\,ds \\ &= [(1 - \varkappa t)\mathfrak{t} + t(\tau - \vartheta')\mathfrak{b}]\,ds. \end{aligned}$$

Er ist vollisotrop, wenn

(3, 47) $$t = \frac{1}{\varkappa}$$

ist. Dieser Wert liefert also, in (44) eingetragen, die isotrope Striktionslinie dervon den Streifennormalen gebildeten Regelfläche (44); in (46) eingetragen, ergibt sich

(3, 48) $$d\mathfrak{z} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\,ds \cdot \mathfrak{b},$$

so daß man die Lotspanne

(3, 49) $$dl = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa}\,ds$$

erhält.

Der Winkel $d\lambda$ benachbarter Streifennormalen ist gleich dem Winkel benachbarter Normalen des Grundrisses der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ unseres Streifens, d. h. man hat

(3, 50) $$d\lambda = \varkappa\,ds.$$

Somit ist der Drall der von den Streifennormalen (44) *gebildeten Regelfläche*

(3, 51) $$p = \frac{dl}{d\lambda} = \frac{\tau - \vartheta'}{\varkappa^2} = \frac{a}{c^2},$$

worin die gesuchte geometrische Deutung der geodätischen Windung a des Streifens enthalten ist.

36. Die Sätze von Beltrami und Joachimsthal. Krümmungsstreifen des isotropen Raumes waren (Nr. 25) jene, deren geodätische Windung

$$a = \tau - \vartheta' \tag{3, 52}$$

verschwindet.

Aus ihrer Definition folgt, daß *die geodätische Windung eines Streifens sich nicht ändert, wenn man seine Berührungsebenen π um die darin liegenden Kurventangenten* t *durch konstante Winkel ϑ^* dreht.* In der Tat wird dabei nur ϑ (d. i. der Neigungswinkel von π gegen die Schmiegebene der Streifenkurve) durch $\vartheta + \vartheta^*$ ersetzt und a bleibt ungeändert.

Für Krümmungsstreifen folgen daraus die Übertragungen der bekannten Sätze von F. Joachimsthal und der hierzu metrisch-dualen Sätze von E. Beltrami auf den isotropen Raum. Bezeichnet man als Krümmungslinie einer Fläche eine solche, deren Berührungsstreifen ein Krümmungsstreifen ist, so gilt:

Satz von Joachimsthal. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Der von zwei Flächen F_1 und F_2 längs ihrer Schnittkurve c gebildete Schnittwinkel ist konstant; 2) Die Schnittkurve c ist auf F_1 Krümmungslinie; 3) Die Schnittkurve c ist auf F_2 Krümmungslinie.

Satz von Beltrami. Im isotropen Raume folgt aus je zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1) Die von zwei Flächen F_1 und F_2 auf den Erzeugenden der gemeinsam umschriebenen Torse Γ abgeschnittenen Strecken haben konstante Länge; 2) Die Torse Γ berührt F_1 nach einer Krümmungslinie; 3) Die Torse Γ berührt F_2 nach einer Krümmungslinie.

37. Geodätische Streifen. Im ganzen letzten Abschnitt war nach (5) für die Streifenkurve $\mathfrak{x}(s)$ die Krümmung $\varkappa(s) \neq 0$ angenommen worden.

Es bliebe also noch die *Theorie der geodätischen Streifen* zu entwickeln, d. h. jener, für deren Kurve $\mathfrak{x}(s)$ $\varkappa(s) \equiv 0$ ist. Es sind das die *Streifen über Kurven in isotropen Ebenen.*

Wir übergehen diese, der allgemeinen durchaus analogen Theorie hier aus Gründen der Kürze. Der Leser wird sie leicht selber ergänzen können. Im übrigen wird sie in einer späteren Abhandlung dieser Reihe benötigt und dort ausführlicher entwickelt werden.

38. Dualisierung. Da die Figur des Streifens in sich dual ist, im isotropen Raume außerdem die Metrik in sich duale Struktur hat, *kann man die Differentialgeometrie der Streifen auch in dualer Weise entwickeln.* Man gelangt so zu drei Streifeninvarianten A, B, C, welche in einfacher Weise mit unseren Invarianten a, b, c zusammenhängen.

IV. Elemente der Flächentheorie des isotropen Raumes.

39. Bezeichnungen. Es sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 1}$$

der Ortsvektor eines Flächenpunktes

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right\} \cdots \mathfrak{x}(u, v) \tag{4, 2}$$

einer auf die Gaussschen Parameter (u, v) bezogenen Fläche des isotropen Raumes. Sein Grundrißvektor

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(u, v) \tag{4, 3}$$

hat die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}\right\} \cdots \bar{\mathfrak{x}}(u, v). \tag{4, 4}$$

Alle auftretenden Funktionen seien — wenigstens in geeigneten gemeinsamen Existenzbereichen $\{u, v\}$ — mit allen benötigten Regularitäts- und Ableitungseigenschaften ausgestattet.

40. Reguläre Flächen. Wir setzen zweckmäßig weiter voraus, daß die Funktionaldeterminante von (4) im betrachteten (u, v)-Bereiche nicht verschwinde:

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = [\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v] \neq 0. \tag{4, 5}$$

Es sollen also insbesondere die *Zylinder mit vollisotroper Erzeugendenrichtung* von unserer Untersuchung *ausgeschlossen* sein, für welche wegen des kurvenhaften Grundrisses die Funktionaldeterminante (5) identisch verschwindet. Deren besondere (einfache) Theorie müßte für sich entwickelt werden; sie wird aber einstweilen noch nicht benötigt.

Die zugelassenen Flächen können also jedenfalls in der expliziten Form

$$z = z(x, y) \tag{4, 6}$$

dargestellt werden.

Flächenpunkte mit isotropen Tangentialebenen sind nach (5) gleichfalls ausgeschlossen. Das Netz der Gaussschen Parameterlinien der Fläche erscheint wegen (5) im Grundriß im untersuchten Bereiche überall regulär.

41. Bogenelement. Für das Bogenelement ds der Fläche (1) erhält man nach (2, 1)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\bar{\mathfrak{x}}^2 = (\bar{\mathfrak{x}}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv)^2. \tag{4, 7}$$

Wenn man die isotropen Fundamentalgrößen erster Art einführt:

$$(4,8)\qquad \begin{cases} E = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 = x_u^2 + y_u^2, \\ F = \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = x_u x_v + y_u y_v, \\ G = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 = x_v^2 + y_v^2, \end{cases}$$

ergibt sich die erste Grundform der Flächentheorie des isotropen Raumes:

$$(4,9)\qquad \boxed{I = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

Wegen

$$(4,10)\qquad W^2 = EG - F^2 = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]^2 > 0$$

ist sie im ganzen Bereiche positiv-definit. Hinsichtlich des Vorzeichens von W wollen wir übereinkommen, in Hinkunft

$$(4,11)\qquad W = \sqrt{EG - F^2} = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v]$$

zu setzen.

42. Winkel- und Flächenmetrik. Geodätische Krümmung. Nach (7) *stimmt die* Riemannsche *Metrik* (9) *der Flächen des isotropen Raumes überein mit der Euklidischen Metrik ihres Grundrisses.*

Das gilt insbesondere für die *Winkelmetrik*. Z. B. ist auch hier $F = 0$ kennzeichnend für *orthogonale Parameternetze*.

Entsprechend kann man auch das gegen isotrope Bewegungen invariante elementare Inhaltsmaß $f_{\mathfrak{B}}$ eines Flächenstückes $\mathfrak{B}$ direkt dem Grundriß $\mathfrak{B}'$ entnehmen. Es gilt also folgende *elementare Inhaltsformel*:

$$(4,12)\qquad f_{\mathfrak{B}} = \iint_{\mathfrak{B}'} dx\,dy = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \iint_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv.$$

Die *geodätische Krümmung* c einer Flächenkurve stimmt nach Nr. 25 mit der elementaren Krümmung $\varkappa$ ihres Grundrisses überein. Man erhält sie in der Riemannschen Metrik (9) in bekannter Weise. Ist die Kurve etwa durch die Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ gegeben, so kann man ihre geodätische Krümmung $\varkappa$ in parameterinvarianter Weise mittels der hinsichtlich der ersten Grundform (9) zu nehmenden *Beltramischen Differentiatoren*[6]) $\nabla\varphi$ und $\Delta\varphi$ durch folgende *Beltramische Formel* berechnen, die in ihrer ausführlicheren Form von Bonnet herrührt:

$$(4,13)\qquad \begin{cases} \varkappa = -\dfrac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}} - \nabla\left(\varphi, \dfrac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right) \\ \quad = \dfrac{1}{W}\left\{\left(\dfrac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\dfrac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_v\right\}. \end{cases}$$

[6]) Für deren bekannte Definition vgl. die Formeln (7, 4) und (5, 4).

43. Absolutkrümmung und Geodätische Linien. *Die Gausssche Krümmung des Bogenelementes* (9), *die wir als die absolute Krümmung K_0 der Fläche des isotropen Raumes bezeichnen, ist stets identisch Null.*

Diese Tatsache, von der wir einige metrische Auswirkungen soeben in Nr. 42 verspürten, ist es vor allem, welche es mit sich bringt, daß die Flächentheorie des isotropen Raumes in mancher Hinsicht ein einfacheres und durchsichtigeres Gepräge trägt, als man es etwa vom euklidischen Raume her gewöhnt ist. Es kommt zu dieser Eigenschaft der inneren Geometrie der Flächen noch die besondere Eigenart der metrischen Struktur des isotropen Raumes, in den die Fläche eingebettet ist. Diese wirkt sich gleichfalls schon in obigen Theoremen aus, ebenso wie z. B. in der uns aus Nr. 7 geläufigen Tatsache, daß alle *Flächennormalen untereinander parallel*, nämlich von *vollisotroper Richtung* sind. Eine Folge von alledem ist dann der Satz:

Auf den Flächen des isotropen Raumes haben die Geodätischen geradlinige Grundrisse. Sie werden aus der Fläche von den isotropen Ebenen ausgeschnitten.

44. Allgemeine Bemerkung über isotrope Flächentheorie. Gleichwohl wäre es sehr voreilig, etwa den Schluß zu ziehen, daß die Flächentheorie oder die Geometrie des isotropen Raumes überhaupt uninteressant oder gar trivial sein müßte. *Man darf nämlich den Umstand nicht übersehen (der gerade der isotropen Raumgeometrie besonderes Interesse verleiht), daß im isotropen Raume an die Stelle der (gelegentlich oder stets) durch identisches Verschwinden versagenden Invarianten immer gewisse andere neue Größen als Ersatzinvarianten treten.* So tritt gelegentlich, wie wir aus den Nrn. 3—6 wissen, an die Stelle der Länge einer Strecke ihre Spanne, oder an die Stelle des Winkels zweier Richtungen ihre Sperrung oder Neigung; oder es tritt, wie aus den Nrn. 17—19 bekannt ist, gelegentlich an die Stelle der Krümmung einer ebenen oder gewundenen Kurve ihre Abweichung (= Normalkrümmung) usw.

In gleicher Weise wird sich uns in der Flächentheorie des isotropen Raumes an Stelle der durch identisches Verschwinden stets versagenden Absolutkrümmung K_0 (d. i. der Gausschen Krümmung ihres isotropen Bogenelementes) als Ersatz von selbst eine andere Invariante darbieten, die wir als ihre Relativkrümmung $K_1 = K$ bezeichnen werden. *Mit ihrer Hilfe gestaltet sich nun auch die Flächentheorie des isotropen Raumes im Wesen ebenso vielgestaltig und formenreich, wie die eines anderen Raumes.*

Ein, wie mir scheint, sehr schlagender Beleg hierfür ist z. B. die von mir bereits an anderer Stelle[2]) entwickelte Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes. Ein weiterer Beleg dafür wäre die Theorie der isotropen Minimalflächen.

45. Die Streifennormale einer Flächenkurve. Wir wollen nun zur Entwicklung der Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes schreiten, und bestimmen zunächst die Normalkrümmung b eines durch die Flächenkurve

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \tag{4, 14}$$

gegebenen Flächenstreifens.

Nach den Formeln (3, 20) und (3, 30) ist

$$b = \frac{1}{R} = -\,[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{y}], \tag{4, 15}$$

wobei sich für die *Tangente* $\mathfrak{x}'$ und *Hauptnormale* $\mathfrak{x}''$ der Flächenkurve ergibt:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_u \dfrac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v \dfrac{dv}{ds}, \\ \mathfrak{x}'' = \mathfrak{x}_{uu}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\,\mathfrak{x}_{uv}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \mathfrak{x}_{vv}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 + \mathfrak{x}_u\dfrac{d^2u}{ds^2} + \mathfrak{x}_v\dfrac{d^2v}{ds^2}. \end{cases} \tag{4, 16}$$

Die *Streifennormale* $\mathfrak{y}$ läßt sich als Linearkombination der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ so bestimmen, daß 1) $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{x}'$, d. h. $(\mathfrak{x}'\mathfrak{y}) = 0$ und 2) $[\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{b}] = +1$ ist. Man findet leicht

$$\mathfrak{y} = -\frac{1}{W}\left\{\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_u - \left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)\mathfrak{x}_v\right\}. \tag{4, 17}$$

46. Die Normalkrümmung. Um die gewünschte Normalkrümmung $b = \frac{1}{R}$ zu errechnen, tragen wir (16) und (17) in die Determinante (15) ein, und entwickeln diese nach der zweiten Zeile. Führen wir die isotropen Fundamentalgrößen zweiter Art ein:

$$\begin{cases} L = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uu}]}{W}, \\ M = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}]}{W}, \\ N = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{vv}]}{W}, \end{cases} \tag{4, 18}$$

so erhalten wir für die *Normalkrümmung* den Ausdruck:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}}. \tag{4, 19}$$

47. Der Satz von Meusnier. Diese die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes beherrschende Formel enthält unmittelbar den

Satz von Meusnier: *Alle Flächenstreifen, welche einen Flächenpunkt* (u, v) *in derselben Richtung* $(du : dv)$ *passieren, haben dort dieselbe Normalkrümmung.*

Mit Rücksicht auf die Resultate der Nr. 33 läßt sich der Meusniersche Satz auch so formulieren:

Alle Flächenkurven, welche einen Flächenpunkt in derselben Richtung passieren, haben dort Schmiegkreise, welche einer festen (parabolischen) Kugel des isotropen Raumes, nämlich der Meusnierschen *Kugel dieser Richtung angehören. Der Parameter p der* Meusnierschen *Kugel ist gleich dem Radius R der gemeinsamen Normalkrümmung der zugehörigen Flächenstreifen. Die* Meusniersche *Kugel einer Flächenrichtung ist eindeutig bestimmt durch die Tangentialebene der Fläche und durch den parabolischen Schmiegkreis jenes Normalschnittes, den die isotrope Ebene dieser Richtung aus der Fläche ausschneidet. Auch der Parameter p dieses parabolischen Normalschnittschmiegkreises ist gleich dem Normalkrümmungsradius R dieser Flächenrichtung.*

48. Die isotrope Meusnier-Formel. Der metrische Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius $r = \frac{1}{\varkappa}$ einer Flächenkurve und dem Radius $R = \frac{1}{\varkappa^*}$ der Normalkrümmung der zugehörigen Flächenrichtung wird durch die Formel (3, 30) geliefert. Bezeichnet ϑ den Winkel, unter dem die Schmiegebene σ der Kurve gegen die Tangentialebene τ der Fläche geneigt ist, so lautet dieser *analytische Ausdruck des* Meusnierschen *Satzes*:

$$\boxed{r = R \cdot \vartheta}. \tag{4, 20}$$

49. Asymptotenlinien. Durch die Gleichung

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{4, 21}$$

werden die Asymptotenlinien der Fläche geliefert. Das Verschwinden der Polarform der zweiten Grundform kennzeichnet konjugierte Flächenrichtungen. Also ist für konjugierte Parameternetze $M = 0$.

Die Parameterlinien sind *normal und auf der Fläche konjugiert* für

$$F = 0, \quad M = 0. \tag{4, 22}$$

Die zugehörigen Flächenstreifen sind dann im Sinne der Nr. 24 *Krümmungsstreifen*, die Linien selber nennen wir *isotrope Krümmungslinien* der Fläche.

50. Cartesische Form der Normalkrümmung. Deutet man in der Grundformel (19) für die Flächenkrümmung R laut Nr. 47 als Radius der Normalkrümmung des zur Richtung $du : dv$ gehörigen isotropen Normalschnittes, so ist in ihr, wie im euklidischen Falle, das isotrope Gegenstück des Eulerschen Satzes enthalten.

Um es einfach herzuleiten, gehen wir von der expliziten Gleichung der Fläche

$$z = z(x, y) \tag{4, 23}$$

aus. Für die Parameter x, y hat man nach (8), (11) und (18) folgende Werte der Fundamentalgrößen:

$$(4,24)\qquad \begin{cases} E=1, & F=0, & G=1, \\ & W=1, & \\ L=r, & M=s, & N=t. \end{cases}$$

Die Krümmungsformel (19) lautet jetzt:

$$(4,25)\qquad \boxed{\frac{1}{R}=\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{dx^2+dy^2}=\frac{II}{I}}.$$

51. Der Eulersche Satz. Verlegt man an einer Stelle (x, y) die beiden (sicher reell vorhandenen) im Sinne der Metrik des isotropen Raumes *normalen und konjugierten Flächenrichtungen*, d. i. die Tangenten der isotropen Krümmungslinien oder die beiden *Hauptkrümmungsrichtungen* nach $dx = 0$ und $dy = 0$, so wird dort $M = s = 0$ und man findet aus (25), wenn φ den Winkel einer beliebigen Flächenrichtung $dx : dy$ gegen die erste Hauptkrümmungsrichtung bezeichnet, also

$$(4,26)\qquad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi$$

bedeutet, und wenn ferner noch mit

$$(4,27)\qquad \frac{1}{R_1}=r,\qquad \frac{1}{R_2}=t$$

die Normalkrümmungen der beiden isotropen Hauptnormalschnitte bezeichnet werden, die bekannte Form des *Eulerschen Satzes*:

$$(4,28)\qquad \boxed{\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2}}.$$

52. Dualisierung. Nach dem metrischen Dualitätsgesetz des isotropen Raumes entsprechen den Sätzen von Meusnier und Euler duale Gegenstücke, die man als die isotropen Übertragungen der euklidischen Sätze von A. Mannheim[7]) und W. Blaschke[8]) auffassen kann. Ihre analytische Formulierung könnte man aus der (hier aus Gründen der Kürze unterdrückten) Herleitung des dualen Gegenstückes der Geometrie der Streifen (vgl. Nr. 38) entnehmen. Man kann sie aber (wie im euklidischen Falle) auch direkt ableiten.

53. Das Schmiegparaboloid. Durch eine isotrope Bewegung kann man nämlich den auf seine Krümmungsverhältnisse zu untersuchenden (regulären) Flächenpunkt P in den Koordinatenanfangspunkt O und seine Tangentialebene τ in die (x, y)-Ebene bringen. Das aus der Taylor-Entwicklung der Flächengleichung zu entnehmende

[7]) A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris 1894, S. 158.
[8]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 118.

Schmiegparaboloid zweiter Ordnung wird dann, wenn die x- und y-Achse die Hauptkrümmungsrichtungen sind, lauten:

(4, 29) $$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right).$$

Seine Krümmungsverhältnisse sind dieselben wie die der Ausgangsfläche (23).

54. Der Krümmungskegel. Um die *isotrope Form des* MANNHEIMschen *und* BLASCHKEschen *Satzes* zu erhalten, ermitteln wir die Berührungskegel, welche sich der Fläche (29) aus den Punkten einer festen Tangente t von O umschreiben lassen, und fragen nach *deren Krümmungskegeln*, d. i. nach jenen Schmiegkegeln, welche (nach Nr. 10) die Fernebene nach Fernkreisen schneiden, d. h. welche Drehkegel sind. Diese Kegel sind ja metrisch dual zu den Krümmungskreisen der ebenen Schnitte durch eine feste Tangente der Fläche.

Benutzt man zur Darstellung der nichtisotropen Ebenen

(4, 30) $$z = ux + vy + w$$

zweckmäßig die (inhomogenen) Koordinaten (u, v, w), so lautet die Ebenengleichung der Fläche (29)

(4, 31) $$R_1 u^2 + R_2 v^2 + 2w = 0.$$

Ist nun

(4, 32) $$X = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$

ein beliebiger Punkt der Tangentialebene $z = 0$ von O, deren Ebenenkoordinaten

(4, 33) $$(u, v, w) = (0, 0, 0)$$

sind, und ist

(4, 34) $$X = r\cos\varphi \cdot u + r\sin\varphi \cdot v + w = 0$$

die Ebenengleichung dieses Punktes X, so geben die beiden Gleichungen (31) und (32) zusammen die analytische Darstellung des Tangentenkegels zweiter Ordnung, den man aus dem Punkte X (32) an die Fläche (31) legen kann. Eliminiert man aus ihnen für den Augenblick w, so ergibt sich die Ebenengleichung des Kegelschnittes f, in dem der Tangentenkegel die Fernebene schneidet. Sie lautet

(4, 35) $$f(u, v) = R_1 u^2 + R_2 v^2 - 2r(u\cos\varphi + v\sin\varphi) = 0,$$

und liefert zusammen mit (34) wieder den Tangentenkegel selber.

55. Der gesuchte oskulierende Drehkegel wird nun seinerseits die Fernebene nach einem f oskulierenden Fernkreise k schneiden, das ist nach einem Kegelschnitt, der die beiden absoluten Geraden (1, 2) des isotropen Raumes berührt. Die Berührungssehne oder Achse a dieses Fernkreises kann durch ihre Linienkoordinaten (U, V) festgelegt werden. Bedeutet nämlich r die als Kegelöffnung bezeichnete feste Neigung der Erzeugenden des Schmiegkegels gegen die Verbindungsebene des Kegelscheitels X mit der Achse a (vgl. Nr. 8), so wird die *Liniengleichung des Fernkreises* die Form haben

(4, 36) $$(u - U)^2 + (v - V)^2 = \mathfrak{r}^2,$$

wobei die Größen U, V, $\mathfrak{r}^2$ aus der Liniengleichung $f(u, v) = 0$ der gegebenen Fernkurve durch dieselben Formeln hervorgehen, welche (dual) den Mittelpunkt und Radius des Schmiegkreises einer ebenen Kurve $f(x, y) = 0$ liefern. Man hat also mit der Abkürzung

(4, 37) $$D = \begin{matrix} f_{uu} & f_{uv} & f_u \\ f_{vu} & f_{vv} & f_v \\ f_u & f_v & 0 \end{matrix}$$

für die *Achse* (U, V) *und Öffnung* $\mathfrak{r}$ *des Fernkreises*:

$$(4,38)\qquad \begin{cases} U = u + \dfrac{f_u\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ V = v + \dfrac{f_v\,(f_u^2 + f_v^2)}{D}, \\ \mathfrak{r}^2 = \dfrac{(f_u^2 + f_v^2)^3}{D^2}. \end{cases}$$

Die Ableitungen von $f(u, v)$ sind dabei an jener Stelle (u, v) zu nehmen, wo die Oskulation stattfinden soll. Dies ist im vorliegenden Falle nach (33) die Ferngerade $(u, v) = (0, 0)$ der Tangentenebene $z = 0$.

Aus (35) ergibt sich so leicht die Achse (U, V) und (nach einer Vorzeichenübereinkunft) die Öffnung $\mathfrak{r}$ des Fernkreises unseres Krümmungskegels:

$$(4,39)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{r\cos\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ V = \dfrac{r\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{r} = \dfrac{r}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

und damit aus (36) die *Gleichung dieses Fernkreises* in Ebenenkoordinaten:

$$(4,40)\qquad u^2 + v^2 - 2r\,\frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0.$$

Das Paar der Gleichungen (34) *und* (40) *stellt damit den gesuchten Krümmungskegel dar, der zum Punkte* X (32) *der Tangente* $\varphi = \text{const.}$ *der Fläche* (29) *gehört.*

56. Die Mannheim-Kugel. Lassen wir nun den Scheitel X (34) des Krümmungskegels eine Flächentangente $\varphi = \text{const.}$ durchlaufen, so bestimmt der Kegel selber ein Hüllgebilde, dessen Gleichung sich durch Elimination des Parameters r aus dem Gleichungspaare (34) und (40) ergibt. Man erhält so als Hülle eine isotrope Kugel mit der Ebenengleichung

$$(4,41)\qquad u^2 + v^2 + \frac{2w}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} = 0,$$

Dies ist die zur Flächentangente t $(\varphi = \text{const.})$ *gehörige* MANNHEIM*-Kugel.* Ihre cartesische Gleichung ist

$$(4,42)\qquad x^2 + y^2 = 2\,(R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi)\cdot z.$$

57. Die Formeln von Mannheim und Blaschke. Für ihren Parameter p oder die Biegung $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ der ihr umschriebenen parabolischen Zylinder erhält man (nach Nr. **21**) den Wert

$$(4,43)\qquad p = -\frac{1}{\mathfrak{R}} = R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi.$$

Wie wir aus Nr. **21** wissen, ist die Biegung eines der Fläche umschriebenen Zylinders der zur Abweichung oder Normalkrümmung eines ebenen (isotropen) Normalschnittes der Fläche duale Krümmungsbegriff.

Die Gleichung (43) gibt für variables φ, d. h. bei variabler Richtung der Berührungserzeugenden t der umschriebenen parabolischen Zylinder, die Beziehung an, welche zwischen dem Neigungswinkel φ der Tangenten t gegen die erste Hauptnormal-

richtung und der Biegung $\frac{1}{\Re}$ der Berührungszylinder bzw. dem Parameter p der MANNHEIM-Kugeln, welche zu den Tangenten t gehören, besteht. Sie ist damit dual zur EULERschen Formel und liefert das *isotrope Gegenstück der Formel von* BLASCHKE.

Da sich für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen $\left(\varphi = 0, \frac{\pi}{2}\right)$ die Werte der „*Hauptbiegungsradien*"

$$\Re_1 = -\frac{1}{R_2}, \quad \Re_2 = -\frac{1}{R_1} \tag{4, 44}$$

ergeben, können wir die *Formel von* BLASCHKE symmetrischer und mit vollständigerem Ausdruck der metrischen Dualität, die sie mit der EULERschen Formel (28) verbindet, so schreiben:

$$\boxed{\frac{1}{\Re} = \frac{\cos^2\varphi}{\Re_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\Re_2}}. \tag{4, 45}$$

Durch Vergleich der Formeln (39) und (43) und eine Vorzeichenübereinkunft ergibt sich jetzt auch noch der *analytische Ausdruck des isotropen Gegenstückes zum Satze von* MANNHEIM:

$$\boxed{\mathfrak{r} = \Re r}, \tag{4, 46}$$

wieder in vollständiger Dualität zur MEUSNIERschen Formel (20).

58. Die Sätze von Mannheim und Blaschke. Fassen wir diese Ergebnisse nochmals in Worten zusammen!

Es seien R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes O und $\Re_1 = -\frac{1}{R_2}$ bzw. $\Re_2 = -\frac{1}{R_1}$ die zugehörigen Hauptbiegungsradien der Zylinder, welche der Fläche in der ersten bzw. zweiten Hauptkrümmungsrichtung umschrieben werden können. Es sei weiter φ der Neigungswinkel einer beliebigen Flächentangente t gegen die erste Hauptnormalrichtung. Dann gilt:

1) *Der Satz von* MANNHEIM: *Die aus den Punkten X der Flächentangente t an die Fläche gelegten Tangentenkegel besitzen längs t oskulierende Drehkegel (= Krümmungskegel), welche eine isotrope Kugel umhüllen, die wir als die* MANNHEIM*-Kugel der Tangente t bezeichnen. Der Biegungsradius $\Re$ des Krümmungszylinders, den man ihr in Richtung t umschreiben kann, hängt mit der Öffnung $\mathfrak{r}$ der Krümmungskegel und dem Abstande r ihrer Scheitel X vom Flächenpunkte O durch die Relation* (46) *zusammen, welche dual ist zur Formel* (20) *von* MEUSNIER, *und als isotropes Gegenstück der euklidischen* MANNHEIMschen *Formel zu deuten ist.*

2) *Der Satz von* BLASCHKE: *Der Biegungsradius $\Re$ des Berührungszylinders, der zur variablen Tangentenrichtung t gehört, hängt mit den beiden (zu den Hauptkrümmungsrichtungen gehörigen) Hauptbiegungsradien $\Re_1$ und $\Re_2$ durch die zur* EULERschen *Formel* (28) *duale Formel von* BLASCHKE (45) *zusammen.*

V. Isotrope Krümmungslinien.

59. Mittlere und relative Krümmung. Wie wir aus Nr. 51 wissen, gibt es auch im isotropen Raume in jedem Punkte einer regulären Fläche zwei Hauptkrümmungsrichtungen. Sie sind zueinander zugleich normal und auf der Fläche konjugiert und die zugehörigen Hauptnormalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ bzw. $\frac{1}{R_2}$ sind die beiden Extremwerte unter den im Flächenpunkte möglichen Normalkrümmungen.

Von ihren Mittelwerten

$$\boxed{\begin{aligned} K &= \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ H &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \end{aligned}} \tag{5, 1}$$

bezeichnen wir (im Anschluß an die Terminologie, die L. Bianchi für den elliptischen Raum prägte), K als die *Relativkrümmung* der Fläche (4, 2) und H als ihre *mittlere Krümmung*.

Die Relativkrümmung kann im isotropen Raume, wie schon in den Nrn. **43** und **44** bemerkt wurde, als Ersatzinvariante für die durch identisches Verschwinden versagende *Absolutkrümmung* K_a der Fläche, d. h. als Ersatz für die verschwindende *Gaußsche Krümmung* ihres Bogenelementes (4, 7) bzw. (4, 9) aufgefaßt werden.

Die mittlere Krümmung H kann man noch auf eine andere, für die isotrope Flächentheorie sehr wichtige Art schreiben. Berechnen wir nämlich die Werte der Krümmungen (1) für die explizite Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche, so finden wir nach (4, 24)

$$\boxed{\begin{aligned} K &= rt - s^2, \\ H &= \tfrac{1}{2}(r + t) = \tfrac{1}{2}\,\Delta z(x, y), \end{aligned}} \tag{5, 2}$$

wobei $\Delta z(x, y)$ den Laplaceschen Ausdruck von $z(x, y)$ für cartesisches Bogenelement (2, 1) bedeutet. Daher läßt sich die *mittlere Krümmung H in parameterinvarianter Weise* so schreiben:

$$\boxed{H = \tfrac{1}{2}\,\Delta z(u, v)}, \tag{5, 3}$$

wobei $\Delta z(u, v)$ den für die z-Koordinate $z(u, v)$ der Fläche (4, 2) hinsichtlich ihres Bogenelementes (4, 9) gebildeten *zweiten Beltramischen Differentiator* bedeutet, also den Ausdruck

$$\Delta z(u, v) = \frac{1}{W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E z_v - F z_u}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G z_u - F z_v}{W}\right)\right\}. \tag{5, 4}$$

60. Flächen konstanter Relativkrümmung. Minimalflächen. Ich habe bereits an anderer Stelle[2]) gezeigt, wie einfach sich die Theorie der Flächen konstanter Relativkrümmung, d. h. die Theorie der vielfach untersuchten Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$(5, 5) \qquad rt - s^2 = K = \text{const.} \neq 0$$

mittels der Idee des isotropen Raumes gestalten läßt.

Man kann nämlich — und das ist der geometrische Sinn der einfachen integrallosen Darstellung, die G. Darboux für diese Flächen fand — *die Flächen fester Relativkrümmung* (5) *durch isotrope Cliffordsche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander in ähnlicher Weise erzeugen, wie dies nach L. Bianchi im elliptischen Raume für dessen Flächen mit verschwindender Absolutkrümmung möglich ist.*

In einer Fortsetzung dieser Reihe werde ich auch die durch *verschwindende mittlere Krümmung*, d. i. durch die Laplacesche Gleichung

$$(5, 6) \qquad 2H = \Delta z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

gekennzeichneten *Minimalflächen des isotropen Raumes*, von denen auch der letzte Abschnitt dieser Note handelt, und die schon von vielen anderen geometrischen und analytischen Gesichtspunkten aus Interesse gefunden haben, ausführlicher studieren. Es wird sich dabei neben den schon bisher bekannten Eigenschaften dieser vor allem für die Funktionentheorie bemerkenswerten Flächen (6) eine Reihe neuer beachtenswerter Tatsachen und *Analogien zur Lehre der euklidischen Minimalflächen* ergeben. Auf einige davon bin ich am Ende dieser Arbeit kurz eingegangen.

61. Krümmungslinien. Jede im Sinne von Nr. 40 reguläre reelle Fläche des isotropen Raumes trägt ein *orthogonales Netz konjugierter Kurven*, das Netz ihrer (*isotropen*) *Krümmungslinien*. Dieses ist (außer bei nicht-isotropen Ebenen und isotropen Kugeln, vgl. Nr. 62) eindeutig bestimmt und entsteht durch Integration der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche. Wegen unserer Art der Winkelmetrik (Nr. 5) gilt folgender einfache Satz:

Die Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes fallen mit jenem Netz konjugierter Kurven zusammen, welches im Grundriß als Orthogonalnetz erscheint.

Als Differentialgleichung der isotropen Krümmungslinien ergibt sich, wie im euklidischen Falle, aus (4, 19)

$$(5, 7) \qquad \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Sie lautet bei expliziter Darstellung der Fläche $z = z(x, y)$ nach (4, 24):

$$s\,dx^2 - (r - t)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0. \tag{5, 8}$$

62. Nabelpunkte. Als Nabelpunkte bezeichnen wir jene Flächenpunkte, deren Normalkrümmungsradien sämtlich gleich sind, für die also $L : M : N = E : F : G$ oder $r = t$ und $s = 0$ ist.

Es gibt auch im isotropen Raume *Flächen mit lauter Nabelpunkten und lauter Krümmungslinien.* Für sie muß

$$s \equiv 0, \quad r \equiv t \tag{5, 9}$$

sein.

Das gibt sofort die Flächen

$$z = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D, \tag{5, 10}$$

also *die isotropen Kugeln und die nicht-isotropen Ebenen.*

63. Ebene und sphärische Krümmungslinien. Daraus folgt im Verein mit den Ergebnissen der Nr. 36 als Anwendung wie im euklidischen Falle die bekannte Kennzeichnung der sphärischen und der ebenen Krümmungslinien durch den

Satz von Joachimsthal: *Ein sphärischer oder (nichtisotroper) ebener Schnitt einer Fläche ist im isotropen Raume dann und nur dann auf ihr Krümmungslinie, wenn der Schnittwinkel der Fläche mit der isotropen Kugel bzw. der nicht-isotropen Ebene konstant ist.*

Es folgt z. B., daß auf einer Drehfläche des isotropen Raumes die Parallelkreise, also auch die dazu normalen Meridiane Krümmungslinien sind. Ebenso sind auch die Schnitte einer isotropen Böschungsfläche mit den parallelen Böschungsebenen Krümmungslinien. Endlich auch bei einer Gesimsfläche mit vollisotropem Grundzylinder die von den Profilpunkten beschriebenen, in parallelen Ebenen liegenden Evolventen des Grundzylinders. Dabei liegen die Krümmungslinien der anderen Schar (wie auch in den beiden vorausgehenden Beispielen) in isotropen Ebenen, auf die sich hier der Satz von Joachimsthal nicht ohne weiteres anwenden läßt.

64. Die isotropen Krümmungslinien bei Ribaucour und Turrière. Die von mir in dieser Auffassung eingeführten Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes[3c]) treten früher schon bei É. Turrière[9]) auf, der sie

[9]) É. Turrière, a) Sur les réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **12** (1912), S. 364—374; auf S. 367 dieser Note weist Turrière auf die sinnfälligen Analogien dieser Kurven zu den (gewöhnlichen) Krümmungslinien hin. — b) Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan. Bull. Soc. Math. France **40** (1912), S. 228—238. — c) Sur une congruence de droites associée au réseau conjugué d'une surface orthogonau en projection sur un plan. Nouv. Ann. de Math. (4) **13** (1913), S. 163—176.

— ohne irgendwelchen Zusammenhang mit einem Krümmungsbegriff — als jenes *Netz konjugierter Flächenkurven* behandelt, *die sich in der Projektion auf eine Ebene als Orthogonalnetz abbilden.* Turrière studiert auch verschiedene besondere Flächen und ihre (in meiner Ausdrucksweise) isotropen Krümmungslinien, so z. B. den Fall der Flächen zweiter Ordnung [10]), der sich sehr einfach erledigen läßt [11]).

Die Frage nach diesen Kurven hat übrigens bei Flächen zweiter Ordnung schon A. Ribaucour [12]) gestellt. Sie wurde vor É. Turrière schon vollständig durch den Mediziner A. Guébhard [13]) beantwortet, und zwar mit rechnerischen Mitteln, wobei auch vielleicht erstmalig die Differentialgleichung (8) auftritt.

65. Die isotrope Geraden-Kugel-Transformation. In den eben angeführten Noten [11]) habe ich gezeigt, daß der isotrope Raum eine *Geraden-Kugel-Transformation* besitzt. Es ist dies im Wesen die sogenannte *Eulersche Transformation.* Schreibt man das Bogenelement (2, 1) des isotropen Raumes (mit einfacher Realitätsverschiebung) in der indefiniten Form

$$(5, 11) \qquad ds^2 = dx \cdot dy,$$

so kann man die Eulersche Transformation involutorisch so ansetzen [14]):

$$(5, 12) \qquad X = -p, \quad Y = -y, \quad Z = px - z, \quad P = -x, \quad Q = q.$$

Mit der euklidischen teilt diese isotrope Geraden-Kugel-Transformation die wichtige Eigenschaft, Asymptotenlinien in isotrope Krümmungslinien zu verwandeln und umgekehrt.

So kann man also auch durch die Eulersche Transformation zu den Krümmungslinien in einem (zunächst freilich indefiniten) isotropen Raum gelangen. Und auf diesem Wege ist in der Tat J. Eiesland [15]) zu ihnen gekommen, wobei übrigens keinerlei Zusammenhang mit der uns leitenden Idee des isotropen Raumes auftritt. Es wird jedoch nicht einmal die seit Lie bekannte Tatsache erwähnt, daß die Eulersche Transformation als ein gewisser Grenzfall der übrigen (euklidischen bzw. nichteuklidischen)

---

[10]) É. Turrière, 9a) auf S. 367/368.

[11]) Vgl. auch K. Strubecker, a) Über die Eulersche Transformation. Comptes rendus instit. des sci. de Roumanie **3** (1939), S. 150–155; insbes. Nr. 6. — b) Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. **48** (1938), S. 236–257; insbes. Nr. 17.

[12]) A. Ribaucour, Question 975 in Nouv. ann. de math. (2) **8** (1869), S. 563.

[13]) A. Guébhard, Nouv. ann. de math. (2) **11** (1872), S. 177–181.

[14]) K. Strubecker, 11a) auf S. 150; 11b) auf S. 251.

[15]) J. Eiesland, Conjugated lines connected with Eulers transformation. Trans. Amer. math. soc. **6** (1905), S. 450–471, insbes. S. 454–455.

Geraden-Kugel-Transformation aufgefaßt werden kann[16]). Eiesland bezeichnet diese Kurven auch mit einem völlig neutralen Namen: er nennt sie „Eulersche Linien" der Fläche, betrachtet übrigens auch ihren Grundriß, freilich ohne zu bemerken, daß sie im Sinne der pseudoeuklidischen Metrik vom Bogenelement (11) ein Orthogonalsystem bilden.

66. Die Beziehungen zur relativen Differentialgeometrie von E. Müller. Am nächsten stehen aber unserer Auffassung dieser Flächenkurven als isotrope Krümmungslinien die Gedanken, welche Emil Müller zu wiederholten Malen[17]) zu ihnen von seiner *relativen Differentialgeometrie* her geführt haben. Wenn auch bei E. Müller die Idee des isotropen Raumes und seiner Flächentheorie noch nicht vorhanden ist, so lassen sich doch seine Gedanken mit erleichterter Terminologie in unseren isotropen Begriffen ausdrücken.

E. Müller betrachtet nämlich die (isotropen) Kugeln (*z*-parallelen Drehparaboloide), welche eine Fläche in einem ihrer (regulären) Punkte berühren, und zeigt, daß es darunter im allgemeinen (d. h. außer an unseren „Nabelpunkten") genau zwei Hauptkugeln gibt, welche stationär, d. h. noch in einem Nachbarpunkte berühren. Die beiden damit in jedem Flächenpunkte definierten Richtungen sind (immer in unserer isotropen Ausdrucksweise) zueinander normal und auf der Fläche konjugiert, und fallen daher mit den isotropen Hauptkrümmungsrichtungen zusammen. Die Integralkurven der Richtungen stationärer Berührung stimmen also mit unseren isotropen Krümmungslinien überein. Sie werden von E. Müller als die *„relativen Krümmungslinien" der Fläche hinsichtlich der Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{P}$ *der (von uns als isotrope Kugeln aufgefaßten) Drehparaboloide mit z-paralleler Achsenrichtung* bezeichnet.

Übrigens treten bei E. Müller[17a]) auch die Größen K und H [in der cartesischen Form (2)] auf, ohne daß eine eigentliche Krümmungstheorie im Sinne unserer Hauptformel (4, 19) oder (4, 25) vorhanden wäre. E. Müller bezeichnet im Rahmen seiner auf die *z*-parallelen Drehparaboloide $\mathfrak{P}$ gestützten Relativgeometrie K als die $\mathfrak{P}$-*Krümmung* und H als die *mittlere* $\mathfrak{P}$-*Krümmung* der Fläche.

67. Invarianz der Krümmungslinien bei isotropen Kugeltransformationen. Dieser Müllerschen Auffassung unserer isotropen Krümmungslinien entnimmt man sofort ihre *Invarianz gegen alle Kugeltransformationen*

[16]) Vgl. hierzu die ausführliche Darstellung bei E. A. Weiss, Die Eulersche Transformation. Monatshefte f. Math. u. Phys. 44 (1936), S. 326—342 und die dort angegebene Literatur.

[17]) E. Müller, a) Relative Minimalflächen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 1—19, insbes. Nr. 4 und S. 17/18. — b) Punktmittenflächen und eine Art relativer Flächentheorie. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **134** (1925), S. 255—280, insbes. Nr. 13.

des isotropen Raumes, d. h. gegenüber jenen räumlichen Cremonatransformationen, welche die isotropen Kugeln untereinander vertauschen. Diese isotropen Analoga der Möbiusschen Kugelverwandtschaften bilden eine von elf Parametern abhängige gemischte Gruppe (G_{11}, H_{11}).

Ein komplex-isomorphes Gegenstück davon, das in unserer Ausdrucksweise zu einem indefiniten isotropen Raum gehören würde, dessen absolutes Geradenpaar (1, 2) reell, nämlich von der Form

$$(5,13) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ t=0 \end{matrix}\right\} e_1, \qquad \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ t=0 \end{matrix}\right\} e_2$$

wäre, ist (ohne Eingehen auf seine Bedeutung für den isotropen Raum) bereits von H. Beck sehr ausführlich untersucht worden[18]). Die analytische Darstellung dieser isotropen Kugeltransformationen gelingt leicht auf Grund der Bemerkung, daß sie sich im Grundriß als gewöhnliche (direkte bzw. indirekte) Möbiussche Kreistransformationen auswirken. Wie H. Beck gezeigt hat, und man aus allgemeineren Entwicklungen von D. Barbilian[19]) entnehmen kann, eignen sich aber vor allem Ternionen zur Darstellung dieser aus verschiedenen Gründen interessanten Gruppe. Ich gedenke auf sie im Zusammenhang mit den Bemerkungen der Nr. 65 zurückzukommen.

68. Weitere Bemerkungen über relative und isotrope Differentialgeometrie. Wie bekannt, stützt sich E. Müllers fruchtbare Idee der relativen Differentialgeometrie auf einen älteren Gedanken von S. Lie[20]) über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Krümmungslinien. Vor allem aber stellt sie den Zusammenhang her mit den allgemeinen, von Minkowski eingeführten relativen Maßbestimmungen, bei denen eine beliebige Eichfläche und ein beliebiger Punkt als ihr „Mittelpunkt" die Rolle der euklidischen Einheitskugel und ihres Mittelpunktes übernehmen.

Es läge in unserem Falle nahe, auch für die Differentialgeometrie des isotropen Raumes den analytischen Apparat von vornherein anzuwenden, über den heute die relative Differentialgeometrie, diese vielleicht am weitesten gedrungene Schöpfung meines Lehrers E. Müller, verfügt, vor allem dank der Arbeiten von W. Süss, W. Blaschke, A. Duschek, T. Kubota,

---

[18]) H. Beck, a) Eine Cremonasche Raumgeometrie. Journ. f. reine u. angew. Math. **175** (1936), S. 129—158. — b) Über Ternionen in der Geometrie. Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 509—520, insbes. § 17.

[19]) D. Barbilian, Galileische Gruppen und quadratische Algebren (mit einem Anhang: Grundriß einer geometrischen Algebrenlehre). Bull. math. soc. Roum. de sci. **40** (1938), S. 7—64.

[20]) S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe. Math. Annalen **5** (1872), S. 195ff., insbes. Nr. 46 = Ges. Abhandl. II. Bd., 2. Abt., 1. Teil, S. 55/56.

J. Hirakawa, L. Berwald u. a. Als Eichfläche könnte dabei eine isotrope Einheitskugel und als Mittelpunkt ein beliebiger Raumpunkt dienen.

Wenn dies hier nicht geschieht, so hat das in der Hauptsache zwei sich ergänzende Gründe. Der erste (an sich weniger wesentliche) Grund ist der, daß die meisten Anwendungen der relativen Differentialgeometrie, ja sogar manche ihrer mit Minkowski ab ovo durchgeführten Entwicklungen als Eichfläche ein geschlossenes Oval voraussetzen, das dann auch gerne zentriert gedacht wird[21]), wobei ihr Zentrum (oder doch irgendein anderer ausgezeichneter eigentlicher Punkt) als Eichmittelpunkt dient. Die Radien nach den Punkten der Eichfläche übernehmen dabei die Rolle der Normalen („Relativnormalen") des Flächenpunktes und der auf die Eichfläche durch parallele Tangentialebenen bezogenen Flächen im Raume. — Im Gegensatz dazu ist nun die im isotropen Raume als Eichfläche zu verwendende isotrope Kugel als Paraboloid eine offene Fläche. Überdies ist, das macht den zweiten, wesentlicheren Grund, im Hinblick auf die isotrope Bewegungsgruppe (1, 4) keiner ihrer inneren Punkte vor dem anderen ausgezeichnet, so daß er als natürlicher Mittelpunkt der Eichfläche vorzugsweise in Frage käme. Es gibt im isotropen Raume und hinsichtlich seiner Kugeln überhaupt nur einen ausgezeichneten Punkt, nämlich seinen *absoluten Punkt*, den Fernpunkt U aller vollisotropen Geraden (Nr. 1). Die auf ihn zu gründende relative Definition der Flächennormalen stimmt zwar mit der isotropen Definition (Nr. 43) überein, eine Anwendung des analytischen Apparates der relativen Differentialgeometrie für einen Fernpunkt als Mittelpunkt der Eichfläche ist aber nicht möglich.

Aus diesen Gründen erweist es sich am günstigsten, die Entwicklung der Differentialgeometrie des isotropen Raumes in erster Linie auf die isotrope Bewegungsgruppe G_6 (1, 4) zu stützen und sie als deren Invariantentheorie zu entwickeln, und die Gedanken der relativen Differentialgeometrie erst dann heranzuziehen, wenn es durch das Versagen oder Trivialwerden gewisser metrischer Begriffe des isotropen Raumes unumgänglich wird. Eine solche Notwendigkeit wird sich z. B. einstellen, wenn wir bei späterer Ge-

[21]) Wie ausschließlich man gerne in der relativen Differentialgeometrie an *geschlossene Eichflächen* denkt, zeigt ein von T. Kubota [Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie. Japan. Journ. of Mathem. XII/2 (1935), S. 21—26] formuliertes *Theorem über die Gültigkeit des Meusnierschen Satzes in der relativen Differentialgeometrie*: „Wenn die durch eine feste Flächentangente möglichen ebenen Schnitte einer beliebigen (regulären) Fläche *Relativschmiegkreise* haben sollen, die einer *Meusnierschen Relativkugel* angehören, *so muß die Eichfläche notwendig ein Ellipsoid sein.*" — Der hier gegen das Resultat unserer Nr. 47 auftretende Widerspruch ist nur scheinbar. Kubota legt eben seiner Untersuchung stillschweigend eine geschlossene Eichfläche zugrunde, so daß der im isotropen Raum realisierte Fall des Paraboloids als weitere mögliche Eichfläche nicht erfaßt wird.

legenheit (Abschn. **VIII**) versuchen werden, die in Nr. 60 definierten *isotropen Minimalflächen* dadurch als ihres Namens berechtigt nachzuweisen, daß wir ein (geometrisch nur aus Relativbegriffen zu gewinnendes) Variationsproblem aufstellen, dessen Extremalflächen sie sind.

69. Relativgeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien. Gleichwohl ist es manchmal auch aus anderen, z. B. elementargeometrischen Gründen von Vorteil, die Ideen der relativen Differentialgeometrie heranzuziehen. Das ist der Fall, wenn es sich z. B. in unserem Falle darum handelt (ähnlich wie im euklidischen Falle), eine Kennzeichnung der Krümmungslinien durch das Verhalten der Flächennormalen zu gewinnen. Man kann dann nämlich mit E. Müller[17a]) eine beliebige isotrope Kugel als Eichfläche und einen beliebigen (z. B. inneren) Punkt O als ihren Mittelpunkt nehmen. Erklärt man dann die von O ausstrahlenden Radien der Kugel als „Relativnormalen" ihrer Tangentialebenen — eine Definition, die natürlich isotropen Bewegungen gegenüber nicht invariant ist —, so gilt das folgende Müllersche Theorem:

Längs der isotropen Krümmungslinien bilden die (wie erwähnt: nicht bewegungsinvarianten) Relativnormalen einer Fläche Torsen.

Man kann diesem Satze durch besondere Wahl der Kugelmitte O eine bemerkenswerte Form geben, die gleichfalls von E. Müller[22]) herrührt. Erklärt man nämlich den Brennpunkt der isotropen Kugel als ihre Relativmitte, so kann man sagen, daß *die Relativnormalen einer Fläche aus den z-parallelen Geraden (d. h. aus den isotropen Flächennormalen!) durch elementargeometrische Spiegelung (Reflexion) an der Fläche entstehen.* Man hat so die folgende bemerkenswerte *elementargeometrische Kennzeichnung der isotropen Krümmungslinien*:

Werden die zur z-Achse parallelen Strahlen (= die isotropen Flächennormalen) an einer Fläche reflektiert, so erhält man eine Strahlenkongruenz, die man als Relativnormalenkongruenz der Fläche deuten kann. Die Torsen dieser Kongruenz schneiden die Fläche nach ihren isotropen Krümmungslinien.

Diesem interessanten elementargeometrischen Ergebnis kommt jedoch — der fehlenden isotropen Bewegungsinvarianz wegen — an sich, wie schon gesagt, keine eigentliche Bedeutung im Rahmen der Geometrie des isotropen Raumes zu.

[22]) E. Müller, [17a]) Satz 2. Die Brennflächen dieser Kongruenz von Relativnormalen sind die elementargeometrischen Brennpunktsörter der isotropen Hauptkugeln der Fläche, d. h. die relativgeometrischen Gegenstücke der Zentraflächen.

70. Isotrope Kennzeichnung der Krümmungslinien. Es gibt aber natürlich auch einfache *isotrop-geometrische Kennzeichnungen* dieser *Krümmungslinien*, in Formulierungen, die auch im euklidischen Falle Bestand haben. Zwar kann man dazu die untereinander parallelen isotropen Flächennormalen nicht heranziehen, wohl aber z. B. die in Nr. 21 eingeführten Streifennormalen. In der Tat gilt (wie im euklidischen Falle) folgender Satz:

Längs der isotropen Krümmungslinien einer Fläche bilden die Streifennormalen Torsen. Dies ändert sich nicht, wenn man die Streifennormalen um die Kurventangenten um denselben Neigungswinkel ψ dreht[23]).

Natürlich bleibt die Streifennormale dabei in einer und derselben isotropen Ebene und der Neigungswinkel ψ ist im Sinne der Formel (1, 15) eigentlich als Neigung schlechthin zu verstehen.

71. Die krümmungsfesten Ähnlichkeiten. Wir haben in den Abschnitten IV und V die Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes als Invariantentheorie den Flächen gegenüber der G_6 von isotropen Bewegungen (1, 4) entwickelt. Daraus darf man nicht folgern, daß alle unsere Ergebnisse für die Krümmungsverhältnisse der Flächen nur dieser Gruppe gegenüber geometrische Bedeutung haben müßten. In der Tat stellt man [z. B. an Hand der expliziten Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche] leicht fest, daß sich die mittlere und die relative Krümmung H und K und damit die Normal-Krümmungsverhältnisse einer Fläche überhaupt sogar gegenüber der siebengliedrigen Gruppe G_7 von isotropen Ähnlichkeiten

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + d_1 x - d_2 y \quad . \\ y' &= b + d_2 x + d_1 y \quad . \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + (d_1^2 + d_2^2) z \end{aligned}\right\} \cdots G_7 \tag{5, 14}$$

invariant verhalten. Man wird diese Transformation darum als die krümmungsfesten Ähnlichkeiten des isotropen Raumes bezeichnen können. Die Invarianz erstreckt sich jedoch nur auf die Normalkrümmung, nicht auch auf die gewöhnliche isotrope Kurvenkrümmung $\varkappa$.

VI. Die Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie.

72. Die Gaußschen Ableitungsgleichungen. Bezeichnen wir mit n den vollisotropen Normalenvektor

$$n = (0, 0, 1) \tag{6, 1}$$

der Fläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v), \tag{6, 2}$$

[23]) Darin steckt natürlich der Satz von JOACHIMSTHAL. Vgl. V. u. K. KOMMERELL, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen I. Berlin-Leipzig 1931, S. 64, Satz 2.

so ist unter den in Nr. 40 angenommenen Regularitätsbedingungen

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = [\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \neq 0. \tag{6, 3}$$

Man kann also die abgeleiteten Vektoren $\mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_{uv}$, $\mathfrak{x}_{vv}$ linear durch $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{n}$ ausdrücken, so daß etwa

$$\mathfrak{x}_{uu} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v + \gamma \mathfrak{n} \tag{6, 4}$$

wird.

Durch Einsetzen von $\mathfrak{x}_{uu}$ in die Definitionsgleichung (4, 18) von L findet man sofort $\gamma = L$. Es ist weiter

$$\bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha \bar{\mathfrak{x}}_u + \beta \bar{\mathfrak{x}}_v, \tag{6, 5}$$

woraus wegen (4, 8) folgt

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha E + \beta F, \\ \bar{\mathfrak{x}}_v \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \alpha F + \beta G. \end{cases} \tag{6, 6}$$

Nun ist $\bar{\mathfrak{x}}_u^2 = E$ und $\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_v = F$, also folgt durch Ableitung nach u:

$$2\,\bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = E_u, \quad \bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v + \bar{\mathfrak{x}}_u \bar{\mathfrak{x}}_{uv} = F_u,$$

d. h. $\bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v$. Daher wird aus (6, 6)

$$\begin{cases} \alpha E + \beta F = \frac{1}{2} E_u, \\ \alpha F + \beta G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \tag{6, 7}$$

woraus man folgert

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{E_u G - 2 F_u F + E_v F}{2 (E G - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\}, \\ \beta = \dfrac{-E_u F + 2 F_u E - F_u E}{2 (E G - F^2)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\}. \end{cases} \tag{6, 8}$$

Ähnlich drücken sich die Ableitungen $\mathfrak{x}_{uv}$ und $\mathfrak{x}_{vv}$ durch die bezüglich der ersten Grundform genommenen Christoffelschen Symbole und die Fundamentalgrößen M und N aus, so daß man insgesamt die *Gaussschen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie* in folgender Gestalt erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + L\,\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + M\,\mathfrak{n}, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_u + \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_v + N\,\mathfrak{n}. \end{aligned}} \tag{6, 9}$$

Diese Gleichungen stimmen formal mit jenen aus der euklidischen Flächentheorie überein. Der Unterschied besteht natürlich darin, daß

die Christoffel-Symbole dort bezüglich des euklidischen, hier bezüglich des isotropen Bogenelementes (4, 9) zu bilden sind.

73. Die Ableitungsformeln von Weingarten. Um zum isotropen Gegenstück der nach WEINGARTEN benannten Gleichungen für die Ableitungen des Vektors der Flächennormalen zu gelangen, genügt es im isotropen Raume offenbar nicht, an die vollisotrope Flächennormale $\mathfrak{n}$ (1) anzuknüpfen. Das würde wegen der Konstanz von $\mathfrak{n}$ ja nur zu den trivialen Gleichungen

$$\mathfrak{n}_u = 0, \quad \mathfrak{n}_v = 0 \tag{6, 10}$$

führen. Wir werden vielmehr auf die *Stellung der Tangentialebene* und ihren Bivektor

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \tag{6, 11}$$

zurückgreifen müssen, den wir günstig noch durch Division durch seinen (im Grundriß ablesbaren) isotropen Flächeninhalt

$$[\bar{\mathfrak{x}}_u, \bar{\mathfrak{x}}_v] = W \tag{6, 12}$$

zum Betrage eins normieren, d. h. als *Einheitsbivektor der Tangentialebene* wählen und mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{W}. \tag{6, 13}$$

Wir führen daneben noch sinngemäß die beiden Bivektoren ein, welche durch $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{x}_u$ bzw. $\mathfrak{x}_v$ bestimmt sind, und setzen

$$\mathfrak{U} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n}], \quad \mathfrak{V} = [\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}]. \tag{6, 14}$$

Mit $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{n}$ sind auch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}$ linear unabhängig, so daß es möglich ist, zu Ableitungsgleichungen dieser Bivektoren zu gelangen.

Zunächst folgt aus (14) und den GAUSSschen Gleichungen (9) das Formelsystem

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{U}_u &= \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{V}, \\ \mathfrak{U}_v = \mathfrak{V}_u &= \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{V}, \\ \mathfrak{V}_v &= \left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{U} + \left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix}\right\} \mathfrak{V}. \end{aligned}} \tag{6, 15}$$

Ferner erhält man aus (13) durch Ableiten

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= \frac{[\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uv}]}{W} - \frac{W_u}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \\ \mathfrak{N}_v &= \frac{[\mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_v] + [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{vv}]}{W} - \frac{W_v}{W^2}[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v], \end{aligned}\right. \tag{6, 16}$$

und daraus ergibt sich, wieder auf Grund der Gaussschen Gleichungen und der Bezeichnungen (14), das *System der Weingartenschen Ableitungsgleichungen der isotropen Flächentheorie*:

(6, 17)
$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{N}_u &= \frac{M}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{L}{W}\,\mathfrak{V},\\ \mathfrak{N}_v &= \frac{N}{W}\,\mathfrak{U} - \frac{M}{W}\,\mathfrak{V}.\end{aligned}}$$

74. Integrabilitätsbedingungen. Bestimmung einer Fläche durch die beiden Grundformen. Kennen wir mit den Gaussschen und Weingartenschen Formeln das (vollständige) System der Ableitungsgleichungen für die Flächen des isotropen Raumes, so erhebt sich die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen sechs vorgegebene Funktionen E, F, G, L, M, N von u und v die beiden Grundformen einer (nur bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen bestimmten) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ bestimmen.

Die zwischen den sechs Fundamentalgrößen bestehenden Abhängigkeiten reduzieren sich auf die *Integrabilitätsbedingungen der Gaussschen Ableitungsgleichungen*, d. h. auf

(6, 18)
$$\left\{\begin{aligned}(\mathfrak{x}_{uu})_v &= (\mathfrak{x}_{uv})_u,\\ (\mathfrak{x}_{uv})_v &= (\mathfrak{x}_{vv})_u.\end{aligned}\right.$$

Die Integrabilitätsbedingungen der Weingartenschen Gleichungen, d. h. die Gleichungen

(6, 19)
$$\mathfrak{N}_{uv} = \mathfrak{N}_{vu}$$

sind eine Folge von ihnen.

Die Integrabilitätsbedingungen (18) bedeuten das Verschwinden der Vektoren

(6, 20)
$$\left\{\begin{aligned}(\mathfrak{x}_{uu})_v - (\mathfrak{x}_{uv})_u &= \alpha_1\mathfrak{x}_u + \beta_1\mathfrak{x}_v + \gamma_1\mathfrak{n},\\ (\mathfrak{x}_{uv})_v - (\mathfrak{x}_{vv})_u &= \alpha_2\mathfrak{x}_u + \beta_2\mathfrak{x}_v + \gamma_2\mathfrak{n},\end{aligned}\right.$$

d. h. das Verschwinden der sechs Koeffizienten rechter Hand.

Wie im euklidischen Falle führen die vier Gleichungen $\alpha_i = 0$ und $\beta_i = 0$ auf dieselbe Bedingung. Sie kann im isotropen Raume dahin formuliert werden, daß die Gleichung

(6, 21)
$$\boxed{K_a = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v\\ F & F_u & F_v\\ G & G_u & G_v\end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v - F_u}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_v - G_u}{W}\right)\right\} = 0}$$

in u und v identisch erfüllt ist. Dies beinhaltet das *Theorema egregium des isotropen Raumes, welches besagt, daß das Bogenelement der Fläche*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{6, 22}$$

verschwindende Gaußsche oder Absolutkrümmung K_a hat.

Die Bedingungen $\gamma_i = 0$ ergeben schließlich, so wie auch im euklidischen Falle, die beiden *Mainardi-Codazzischen Gleichungen*:

$$\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(L_v - M_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(E_v - F_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} &(EG - 2FF + GE)(M_v - N_u) \\ &-(EN - 2FM + GL)(F_v - G_u) \end{aligned} + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0. \tag{6, 23}$$

Sie würden sich übrigens auch als die Integrabilitätsbedingungen der Weingartenschen Gleichungen (17) ergeben.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so gilt nach den Existenzsätzen aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen der folgende für die Flächentheorie des isotropen Raumes grundlegende Satz:

Sind das Theorema egregium (21) *und die Mainardi-Codazzischen Gleichungen* (23) *erfüllt, so ist durch die sechs Fundamentalgrößen E, F, G, L, M. N eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des isotropen Raumes festgelegt, und zwar eindeutig bis auf isotrope Bewegungen und Umlegungen.*

75. Eine Anwendung der Codazzischen Gleichungen: Der Satz von G. Scheffers über die Flächen fester Relativkrümmung. Meine vor kurzem erschienene Note über die Flächen fester Relativkrümmung

$$K = rt - s^2 = \text{const.} \neq 0 \tag{6, 24}$$

des isotropen Raumes[2]) enthält als eines ihrer hauptsächlichen Ergebnisse eine sehr einfache geometrische Erzeugung dieser aus vielen Gründen bemerkenswerten Flächen. *Man kann nämlich, wie ich bewies und schon erwähnt wurde, diese Flächen* (24) *mit Hilfe der auch im isotropen Raume vorhandenen Cliffordschen Schiebungen aus ihren Asymptotenlinien als Cliffordsche Schiebfläche erzeugen.*

Der Beweis dieses Theorems stützte sich dabei auf folgenden schon von G. Scheffers[24]) stammenden Satz:

Bei den Flächen $rt - s^2 = K = \text{const.}\ (\neq 0)$, und nur bei ihnen, bilden die Asymptotenlinien im Grundriß ein Schiebnetz.

[24]) G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{const.}$ Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117; insbes. S. 114.

Da die Schiebnetze die einzigen Tschebyscheff-Netze (= äquidistante Netze, $E = G = 1$) der Ebene sind, und die isotrope Flächenmetrik sich im Grundriß als gewöhnliche euklidische Metrik äußert, kann dieser Satz von Scheffers in isotroper Ausdrucksweise auch so formuliert werden und bildet dann das isotrope Gegenstück eines bekannten Satzes von Hazzidakis über euklidische Flächen konstanter Gaussscher Krümmung:

Auf den Flächen fester Relativkrümmung $K = \text{const.} \neq 0$ des isotropen Raumes, und nur auf ihnen, bilden die Asymptotenlinien ein äquidistantes (= Tschebyscheff-)Netz.

Wir wollen diesen Satz mit unseren Mitteln beweisen, und beziehen zu dem Zwecke die Fläche auf Asymptotenparameter. Man hat dann

$$L = N = 0 \tag{6, 25}$$

und nach (5, 1)

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} = \text{const.} \neq 0, \tag{6, 26}$$

also

$$M^2 = -K(EG - F^2) \neq 0. \tag{6, 27}$$

Ziehen wir für unsere Fläche konstanter Relativkrümmung die Codazzi-Mainardischen Gleichungen (23) heran! Sie lauten wegen (25) und (27) und nach Kürzung durch $M \neq 0$

$$\begin{cases} +2\frac{M M_u}{K} + 2F(E_v - F_u) - (EG_u - GE_u) = 0, \\ -2\frac{M M_v}{K} + 2F(F_v - G_u) - (EG_v - GE_v) = 0. \end{cases} \tag{6, 28}$$

Berechnet man nun die Größen $2MM_u$ und $2MM_v$ durch Ableitung von (27), so findet man für (28) einfach:

$$\begin{cases} EG_u - FE_v = 0, \\ FG_u - GE_v = 0. \end{cases} \tag{6, 29}$$

Daraus folgt, da die Determinante $EG - F^2 \neq 0$ ist, zunächst

$$E_v = 0, \quad G_u = 0, \tag{6, 30}$$

d. h.

$$E = E(u), \quad G = G(v), \tag{6, 31}$$

und durch Einführung der neuen Parameter

$$u' = \int \sqrt{E(u)}\, du, \quad v' = \int \sqrt{G(v)}\, dv \tag{6, 32}$$

endlich

$$E' = G' = 1. \tag{6, 33}$$

Damit ist zunächst gezeigt, daß die Asymptotenlinien auf den Flächen fester Relativkrümmung wirklich ein äquidistantes Netz bilden.

Bleibt noch die Umkehrung, d. i. der Nachweis dafür, daß äquidistante Netze aus Asymptotenlinien nur auf Flächen fester Relativkrümmung $K = \text{const.}$ möglich sind.

Es sei also für die Asymptotenlinien als Parameterlinien, d. h. für $L = N = 0$ die Bedingung der Äquidistanz

$$E = G = 1 \tag{6, 34}$$

erfüllt. Dann ergeben die Codazzi-Mainardischen Gleichungen:

$$\begin{cases} (1 - F^2) M_u + M F F_u = 0, \\ (1 - F^2) M_v + M F F_v = 0. \end{cases} \tag{6, 35}$$

Dies besagt aber nach (26) und (34), daß für die Relativkrümmung K

$$K_u = 0, \quad K_v = 0 \tag{6, 36}$$

gilt, also in der Tat für die Fläche $K = \text{const.}$ ist.

VII. Sphärische Abbildung und Richtungsbild.

76. Das sphärische Bild. Mehr als die euklidische hat die isotrope Flächentheorie in ihren Problemen mit Vorteil die sphärische Abbildung der Flächen oder deren Verknüpfung mit der stereographischen Projektion, das sogenannte Richtungsbild der Flächen heranzuziehen.

Wir erklären als Einheitskugel des isotropen Raumes die isotrope Kugel vom Parameter minus eins:

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{7, 1}$$

Bilden wir auf sie vermittels paralleler Tangentialebenen die Punkte $\mathfrak{x}(x, y, z)$ der Fläche

$$\mathfrak{x}(u, v) \cdots \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{7, 2}$$

ab, so ergibt sich der *sphärische Bildpunkt* $\mathfrak{X}(X, Y, Z)$

$$\mathfrak{X}(u, v) \cdots \begin{cases} X = + \dfrac{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}{W}, \\ Y = + \dfrac{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}{W}, \\ Z = -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) = -\tfrac{1}{2} \nabla z(u, v), \end{cases} \tag{7, 3}$$

wobei

$$\nabla z(u, v) = \frac{E z_v^2 - 2 F z_u z_v + G z_u^2}{E G - F^2} = -\frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u \\ F & G & z_v \\ z_u & z_v & 0 \end{vmatrix}}{E G - F^2} \tag{7, 4}$$

den bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen *ersten Beltramischen Differentiator* von $z(u, v)$ bedeutet.

77. Das Richtungsbild. Der Übergang zum Grundriß des sphärischen Bildes kann im isotropen Raume als stereographische Projektion der Einheitskugel (1) aus ihrem absoluten Fernpunkt gedeutet werden. Der entstehende Bildpunkt

(7, 5) $$\overline{\mathfrak{x}} = (X, Y)$$

kann im Anschluß an eine Ausdrucksweise der Darstellenden Geometrie als das Richtungsbild des Flächenpunktes $\mathfrak{x}$ bezeichnet werden.

Merken wir noch die Formeln für das sphärische und Richtungsbild der Fläche bei *expliziter* Darstellung

(7, 6) $$z = z(x, y)$$

an. Man hat

(7, 7) $$\mathfrak{X} \cdots \begin{cases} X = -p(x, y) \\ Y = -q(x, y) \\ Z = -\frac{1}{2} \nabla z(x, y) = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2). \end{cases} \cdots \overline{\mathfrak{x}},$$

78. Die dritte Grundform. Der Satz von Beltrami-Enneper. Aus den Formeln (7) ergibt sich für das *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* und das ihm gleiche *des Richtungsbildes*

(7, 8) $$dS^2 = III = dX^2 + dY^2 = (r\,dx + s\,dy)^2 + (s\,dx + t\,dy)^2.$$

Mit Hilfe der Formeln (4, 25) und (5, 3) bestätigt man leicht, daß auch im isotropen Raum diese dritte Grundform III mit der ersten und zweiten durch die Relation

(7, 9) $$\boxed{K \cdot I - 2H \cdot II + III = 0}$$

verbunden ist. Wir schreiben allgemein:

(7, 10) $$dS^2 = III = 2H \cdot II - K \cdot I = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Daraus folgert man in bekannter Weise die Gültigkeit des Satzes von Beltrami und Enneper für die Torsionen τ der sich in einem Flächenpunkte der Relativkrümmung K kreuzenden Asymptotenlinien: Wegen $II = 0$ hat man für sie

(7, 11) $$\tau = \frac{dS}{ds} = \pm\sqrt{\frac{III}{I}} = \pm\sqrt{-K},$$

was sich übrigens auch ohne (11) durch elementare Rechnung erweisen ließe[2]).

79. Definition der Relativkrümmung K im Sinne von Gauss. Man kann die *Relativkrümmung* K in Übertragung eines Gaussschen Gedankens als den *Grenzwert* des Quotienten korrespondierender Flächenelemente dF und df

des sphärischen Bildes und der Fläche auffassen. Man hat nämlich nach (4, 12) für die Flächeninhalte korrespondierender Bereiche

$$(7,12)\qquad \begin{cases} F = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv, \\ f = \iint\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\, du\, dv. \end{cases}$$

Zieht man F und f entsprechend auf Punkte zusammen, so hat man nach (7) in der Tat

$$(7,13)\qquad \lim \frac{dF}{df} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)} \cdot \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} -r & -s \\ -s & -t \end{vmatrix} = K.$$

Daraus folgt z. B., daß für Flächen mit der festen Relativkrümmung $K = +1$ bzw. $K = -1$ die sphärische Abbildung und das Richtungsbild direkt bzw. indirekt flächentreu ausfallen.

80. Die Konformität des sphärischen Bildes der Minimalflächen. Von mehr Interesse ist die Frage nach jenen Flächen, $z = z(x, y)$, deren sphärisches Bild zur Fläche selbst konform ausfällt.

Für die Abbildungsfunktionen (7)

$$(7,14)\qquad \begin{cases} X = -p(x, y), \quad Y = -q(x, y), \\ \frac{\partial (X, Y)}{\partial (x, y)} = K \neq 0 \end{cases}$$

gilt dann

1. im Falle direkter Konformität nach Cauchy-Riemann

$$(7,15)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. man hat

$$(7,16)\qquad r = t, \quad s = 0.$$

Die Fläche hat dann notwendig eine Gleichung der Form

$$(7,17)\qquad z = \alpha (x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$$

mit $\alpha \neq 0$, und es folgt der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die isotropen Kugeln, und nur für sie, direkt konform, nämlich eine direkte Ähnlichkeit.

2. Im Falle indirekter Konformität hat man statt (15) die Gleichungen

$$(7,18)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

d. h. es muß gelten:

$$(7,19)\qquad r + t = 0, \quad s = s.$$

Dies bedeutet nach (5, 3), daß die mittlere Krümmung H der Fläche verschwindet. Nach Nr. 60 ergibt sich der Satz:

Die sphärische Abbildung ist für die krummen Minimalflächen des isotropen Raumes ($H = 0$) *und nur für sie indirekt konform. Der Grundriß der Fläche ist dann ebenfalls indirekt konform auf das Richtungsbild bezogen.*

81. Dualisierung des Bogenelementes. Das im isotropen Raume gültige metrische Dualitätsgesetz legt es nahe, auch die Flächentheorie in einer Weise aufzubauen, die völlig in sich dual ist. Ein solcher *dualistischer Aufbau*, den wir hier aus Gründen der Kürze nicht systematisch durchführten, sondern nur in einigen Punkten besonderen Interesses andeuteten (Nr. 52), würde anzuknüpfen haben an das *zum Bogenelement ds duale Winkelelement $d\vartheta$* zweier benachbarter Tangentialebenen der Fläche. Dieser Winkel $d\vartheta$, dessen Definition durch die Formeln (1, 7) oder (2, 22) geliefert wird, kann auch als der Winkel der parallelen Tangentialebenen des sphärischen Bildpunktes angesehen werden. Er fällt daher (nach den Bemerkungen in Nr. 9) einfach mit dem *Bogenelement dS des sphärischen Bildes* zusammen:

$$(7,20) \qquad \boxed{d\vartheta^2 = dS^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = III}.$$

VIII. Die Relativoberfläche. Die isotropen Minimalflächen als ihre Extremalen. Assoziierte Minimalflächen. Die isotrope Enneperfläche.

82. Isotroper Flächeninhalt und Plateausches Problem. Das nach Plateau benannte Problem der klassischen Differentialgeometrie verlangt, in eine einfach-geschlossene Raumkurve ein Flächenstück minimalen Inhalts einzuspannen. Es ist heute, wie bekannt, in umfangreichstem Sinne gelöst und man weiß seit Lagrange, daß als seine Lösungen Minimalflächen auftreten, d. h. solche verschwindender mittlerer Krümmung H.

Besieht man das entsprechende Problem des isotropen Raumes, so stellt man sofort fest: Wird die Oberflächendefinition zugrunde gelegt, welche von unserer bisherigen isotropen Inhaltsbestimmung (4, 12) geliefert wird, d. h. mißt man den *Inhalt f des isotropen Flächenstückes $\mathfrak{B}$ durch die elementare Fläche ihres Grundrisses $\mathfrak{B}'$*:

$$(8,1) \qquad f = \iint\limits_{\mathfrak{B}} W\,du\,dv = \iint\limits_{\mathfrak{B}'} dx\,dy,$$

so ist die Plateausche Problemstellung deswegen trivial, weil alle in die einfach-geschlossene Kurve eingespannten isotropen Flächenstücke mit einfach überdecktem Grundriß denselben Inhalt, nämlich jenen ihres Grundrisses haben.

Die Inhaltsbestimmung der Formel (1) hat also zwar den Vorteil, gegen isotrope Bewegungen invariant zu sein, sie leistet auch für viele belangvolle geometrische Fragestellungen die vom euklidischen Falle her erwarteten Dienste (man denke etwa an unsere Übertragung der Gaussschen Definition der Relativkrümmung K in Nr. 79), sie versagt aber, wenn es gilt, das Variationsproblem der Oberfläche im isotropen Raum sinnvoll zu formulieren.

83. Möglichkeit eines nicht-invarianten Oberflächenbegriffes, mit invarianten Extremalen. Es ist aber darum nicht unmöglich, einen neuen Oberflächenbegriff für den isotropen Raum aufzustellen, dessen Variationsproblem gerade von den isotropen Minimalflächen, nämlich jenen mit verschwindender mittlerer Krümmung H gelöst wird. Wir werden dabei allerdings in Kauf nehmen müssen, daß dieser neue Begriff der Oberfläche isotropen Bewegungen gegenüber nicht mehr invariant ist. Das muß aber seinerseits wieder nicht bedeuten, daß auch die Extremalen dieser nicht-bewegungsinvarianten Inhaltsbestimmung gleichfalls nicht-invariant sind. Im Gegenteil! Es wird sich zeigen, daß die Extremalen der jetzt zu definierenden „Relativoberfläche" des isotropen Raumes von durchaus bewegungsinvariantem Charakter sind, nämlich, wie erwähnt, mit seinen Flächen verschwindender mittlerer Krümmung $H = 0$ zusammenfallen.

Damit ist zu den vielen Eigenarten, welche der Geometrie des isotropen Raumes bisher an sich schon anhaften, eine neue, nicht weniger interessante gefügt.

Wenn wir noch an die Bemerkungen in Nr. 44 anschließen, die feststellten, daß im isotropen Raume überall dort, wo eine Invariante immer oder in Einzelfällen versagt, eine andere Invariante als Ersatz vorhanden sei, so werden wir im Hinblick auf die Begriffe *isotrope Oberfläche* und *isotrope Relativoberfläche* feststellen können, daß im isotropen Raume auch dafür gesorgt ist, daß diese Invariante, die Oberfläche, die an sich zwar nichttrivial vorhanden ist, aber gewissen Problemen, wie unserem Variationsproblem gegenüber versagt, ersetzt werden kann durch eine andere, freilich nicht mehr invariante Größe, eben die Relativoberfläche, für die das betreffende Problem wirklich und nichttrivial gelöst werden kann und sogar zu einem durchaus invarianten Resultat, nämlich zu unseren Lösungsflächen verschwindender mittlerer Krümmung führt.

84. Definition der isotropen Relativoberfläche. Wir wählen die isotrope Kugel

$$z = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{8, 2}$$

als Eichfläche und den beliebigen Raumpunkt $\mathfrak{M}$ vom Ortsvektor

$$\mathfrak{M} = (\xi, \eta, \zeta) \tag{8, 3}$$

als „Mittelpunkt" einer Minkowskischen Maßbestimmung. Es sei weiter

$$\mathfrak{X} = \{X, Y, -\tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2)\} \tag{8, 4}$$

der in den Formeln (7, 3) bzw. (7, 7) niedergelegte sphärische Bildpunkt des Punktes

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\} \tag{8, 5}$$

der Fläche (7, 2), und

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} - \mathfrak{M} \tag{8, 6}$$

der vom Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ zum sphärischen Bildpunkt $\mathfrak{X}$ führende „Radius" der Eichfläche (2), welche auch, wie alle isotropen Kugeln, als Relativkugel bezeichnet wird.

Dann wollen wir mit H. Minkowski[25]) *als isotrope Relativoberfläche O des im Sinne der Nr.* **40** *regulären Flächenstückes* $\mathfrak{B}$ (7, 2) *die Größe*

$$\boxed{O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{Y}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv} \tag{8, 7}$$

definieren. Wir können sie sofort in zwei Teile aufspalten; man hat zunächst nach (6)

$$O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X} - \mathfrak{M},\ \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv, \tag{8, 8}$$

also

$$O = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv - \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv. \tag{8, 9}$$

85. Umformung der Relativoberfläche mittels Gaußens Integralformel. Hier hängt der erste Teil von der besonderen Lage des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ zwar nicht mehr ab, er hat aber doch im isotropen Raume *keinerlei absolute, d. h. invariante Bedeutung.* In der Tat ist dieser Teil, den wir mit O^* bezeichnen wollen:

$$O^* = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{X}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]\, du\, dv \tag{8, 10}$$

nichts anderes als *die für den Koordinatenanfang* $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ *als Mittelpunk der Minkowskischen Metrik genommene Relativoberfläche des Flächenstücks* $\mathfrak{B}$, *also ebensowenig mit der Fläche bewegungsinvariant verknüpft, wie es der Koordinatenanfang* $\mathfrak{O}$ *mit der isotropen Kugel* (2) *ist.*

[25]) H. Minkowski, Volumen und Oberfläche. Math. Annalen **57** (1903), S. 447—495; = Ges. Abhandl., II. Bd., Abh. XXVI; insbes. § 8. — Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie II, S. 205.

Man kann O^* in sehr einfacher Weise und parameterinvariant schreiben. In der Tat findet man durch Eintragen von $\mathfrak{x}$ aus (7, 3)

$$O^* = \tfrac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(u, v) \cdot W \, du \, dv, \tag{8, 11}$$

unter $\nabla z(u, v)$ den auf die z-Koordinate der Fläche angewandten und bezüglich der ersten Grundform (4, 9) genommenen ersten Beltramischen Differentiator (7, 4) verstanden.

Wenden wir uns noch dem zweiten Teile von (9) zu! Er hängt außer von dem Flächenstück $\mathfrak{B}$ nur noch von dem festen, aber an sich beliebigen Mittelpunktsvektor $\mathfrak{M}$ ab, ist also gegenüber isotropen Bewegungen der Fläche (d. h. der Fläche allein) ebenfalls nicht invariant. Wir können aber weiter leicht feststellen, daß dieses zweite oder, wie wir gerne sagen wollen, *dieses „Zusatzglied"*

$$J = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv \tag{8, 12}$$

lediglich vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes $\mathfrak{B}$, nicht aber von der speziellen Fläche $\mathfrak{B}$ (7, 2) selbst abhängt.

In der Tat hat man nach dem Gaussschen Integralsatze

$$\iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv = \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}], \tag{8, 13}$$

woraus durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{M}$ folgt:

$$J = \iint_{\mathfrak{B}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \, du \, dv = \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}]. \tag{8, 14}$$

Eine einfache, aber später wichtige Folgerung ist, daß *bei beliebiger Variation des in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannten Flächenstückes $\mathfrak{B}$ das Zusatzintegral J keine Änderung erfährt, d. h. daß*

$$\delta J = 0 \tag{8, 15}$$

ist.

Zusammenfassend lautet also die für den Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Eichfläche (2) *gebildete Relativoberfläche O eines regulären Stückes $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$:*

$$O = O^* - J = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla z(u, v) \cdot W \, du \, dv - \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{M}, \mathfrak{x}, d\mathfrak{x}]. \tag{8, 16}$$

Dabei stellt O^* die zum Koordinatenumfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als Mittelpunkt gehörige Relativoberfläche dar, während das von der Verschiedenheit der

Zentren $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}$ herrührende Zusatzglied J nur vom Rande $\mathfrak{R}$ des Flächenstückes abhängt.

86. Verhalten der Relativoberfläche bei isotropen Bewegungen. Wird ein Flächenstück $\mathfrak{B}$ im isotropen Raume bewegt, so erfährt sein sphärisches Bild auf der Einheitskugel (2) ebenfalls eine gewisse Bewegung, die im Sinne der isotropen Kinematik als eine Drehung der Eichkugel aufgefaßt werden kann. Wenn der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ bei dieser Kugeldrehung mitgenommen wird, so ist klar, daß die Relativoberfläche des alten Flächenstückes, genommen für das alte Eichzentrum einerseits und die Relativoberfläche der neuen Lage des Flächenstückes bezüglich der neuen Lage des Eichzentrums andererseits einander gleich sind. *Bei gleichzeitiger und korrespondierender isotroper Bewegung der Fläche im Raum und des Eichzentrums im System des sphärischen Bildes ist die Relativoberfläche eine isotrope Invariante.*

Es folgt daraus, daß bei der üblichen Auffassung der Minkowskischen Metrik, bei der doch der Mittelpunkt der Metrik als durchaus fest zu betrachten ist, von einer isotropen Bewegungsinvarianz der Relativoberfläche nicht die Rede sein kann. Wenn wir z. B. den Koordinatenanfang $\mathfrak{O} = (0, 0, 0)$ als rechnerisch bequemstes Zentrum wählen und demgemäß als Relativoberfläche einfach den Ausdruck O^* (10) erklären, so ist das, wie oben schon erwähnt, gewiß keine gegen isotrope Bewegungen invariante Definition. In der Tat ist ja die einzige invariante Flächenmaßbestimmung jene, welche durch die elementare Inhaltsformel (1) erklärt ist.

Gleichwohl ist es jedoch, wie schon erwähnt, möglich, daß das Variationsproblem, das sich mit unserer Definition der isotropen Relativoberfläche verknüpfen läßt, auf eine Klasse von Extremalflächen führt, denen im isotropen Raume durchaus invarianter Charakter zukommt. Diese Möglichkeit beruht offenbar darauf, daß nach (16) die bezüglich zweier beliebiger Eichzentren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ genommenen Relativoberflächen sich nur um ein Randintegral unterscheiden, oder, was dasselbe ist, um ein Doppelintegral — des Typus (12) —, dessen Integrand ein Divergenzausdruck ist.

87. Die erste Variation der Relativoberfläche. Notwendigkeit von $H = 0$ für isotrope Minimalflächen. *Wir wollen als isotrope Minimalflächen die Extremalen des Variationsproblems der isotropen Relativoberfläche erklären und wollen zeigen, daß für solche Flächen notwendig die mittlere Krümmung H (5, 1) verschwindet.*

Wir fanden für H in (5, 3) die invariante Darstellung:

$$H = \tfrac{1}{2} \Delta z(u, v). \tag{8, 17}$$

Es gilt also, die erste Variation δO der Relativoberfläche zu berechnen, wobei wir uns vorstellen, daß alle zur Konkurrenz zugelassenen Flächenstücke

in den Rand $\mathfrak{R}$ eingespannt seien. Da das Zusatzglied J in (16) als Randintegral verschwindende Variation hat, genügt es, die Relativoberfläche durch O^* zu erklären und sie durch die Formel (11) zu definieren.

Das Flächenstück $\mathfrak{B}$ (7, 2) soll dadurch variiert werden, daß wir auf den (vollisotropen, d. i. z-parallelen) Flächennormalen die Strecken $\varepsilon \cdot \lambda(u, v)$ auftragen. Die variierte Fläche $\bar{\mathfrak{B}}$ hat also folgende Form:

$$(8, 18) \qquad \bar{\mathfrak{x}}(u, v) \ldots \begin{cases} \bar{x} = x(u, v), \\ \bar{y} = y(u, v), \\ \bar{z} = z(u, v) + \varepsilon \cdot \lambda(u, v), \end{cases}$$

wobei $\lambda(u, v)$ am gemeinsamen Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ verschwindet.

Die variierte Relativoberfläche $\bar{O}^*$ lautet nach (11) wegen des gemeinsamen Parametergebietes

$$(8, 19) \qquad \bar{O}^* = \tfrac{1}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla \bar{z}(u, v)\, W\, du\, dv.$$

Nach (18) und bekannten Regeln ist nun

$$(8, 20) \qquad \nabla \bar{z} = \nabla [z + \varepsilon \cdot \lambda] = \nabla z + 2\varepsilon \nabla (z, \lambda) + \varepsilon^2 \nabla \lambda,$$

wobei

$$(8, 21) \qquad \nabla (z, \lambda) = \frac{E z_v \lambda_v - F (z_u \lambda_v + z_v \lambda_u) + G z_u \lambda_u}{E G - F^2} = - \frac{\begin{vmatrix} E & F & z_u \\ F & G & z_v \\ \lambda_u & \lambda_v & 0 \end{vmatrix}}{E G - F^2}$$

den gemischten ersten Beltramischen Differentiator bezeichnet. Es folgt

$$(8, 22) \qquad \bar{O}^* = O^* + \varepsilon \iint_{\mathfrak{B}} \nabla (z, \lambda)\, W\, du\, dv + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint_{\mathfrak{B}} \nabla \lambda \cdot W\, du\, dv.$$

Die erste Variation der Relativoberfläche O^* ist daher

$$(8, 23) \qquad \delta O^* = \iint_{\mathfrak{B}} \nabla (z, \lambda)\, W\, du\, dv.$$

Ihr Verschwinden ist ein notwendiges Kennzeichen der isotropen Minimalflächen.

Die Umgestaltung von δO^* durch partielle Integration, d. i. die Anwendung der Greenschen Formel, gibt nun

$$(8, 24) \qquad \iint_{\mathfrak{B}} \nabla (z, \lambda)\, W\, du\, dv = - \oint_{\mathfrak{R}} \lambda \frac{\partial z}{\partial n}\, ds - \iint_{\mathfrak{B}} \lambda\, \Delta z \cdot W\, du\, dv,$$

wobei unter $\frac{\partial z}{\partial n}$ die Ableitung von $z(u, v)$ nach der isotropen [d. h. im Sinne der Riemannschen Metrik (4, 9) verstandenen] Normalenrichtung n des Randes $\mathfrak{R}$, und unter ds sein isotropes Bogenelement (4. 9) gemeint ist. Dabei denken wir uns den Rand $\mathfrak{R}$ in jenem Sinne durchlaufen, bei dem im Grundriß das Innere zur Linken bleibt, und denken auch an die innere Normale n.

In dieser Darstellung der ersten Variation δO^* der Relativoberfläche verschwindet nun das Randintegral, da $\lambda(u, v)$ auf $\mathfrak{R}$ Null sein sollte. Man hat also

$$\delta O^* = -\iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(u, v) \cdot W \, du \, dv, \tag{8, 25}$$

und daher ist für isotrope Minimalflächen in der Tat notwendig

$$\Delta z(u, v) = 0. \tag{8, 26}$$

Wegen (17) folgt daraus der Satz:

Das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$2H = \Delta z(u, v) = 0 \tag{8, 27}$$

ist ein notwendiges Kennzeichen der Minimalflächen des isotropen Raumes.

88. Die isotropen Minimalflächen als Extremalen des Dirichletschen Problems. Ihre Darstellung als Potentialflächen. Wir wollen unsere Formeln noch für die explizite cartesische Darstellung $z = z(x, y)$ der Fläche anschreiben. Man hat dann für die auf den Ursprung bezogene isotrope Relativoberfläche

$$\boxed{O^* = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \Gamma z(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{2}\iint_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx \, dy}. \tag{8, 28}$$

Die Variationsformel (22) aber nimmt mit Rücksicht auf (25) die Gestalt an:

$$\bar{O}^* = O^* - \varepsilon \iint_{\mathfrak{B}} \lambda \Delta z(x, y) \, dx \, dy + \frac{\varepsilon^2}{2}\iint_{\mathfrak{B}} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) \, dx \, dy. \tag{8, 29}$$

Aus ihr entnimmt man sofort, daß *das zu den isotropen Minimalflächen gehörige Extremum der Relativoberfläche* (28) *stets ein absolutes Minimum ist.*

In der Tat ist für sie nach (27) die Laplacesche *Gleichung*

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{8, 30}$$

erfüllt, und das letzte Integral in (29) stets (d. h. abgesehen vom Trivialfalle $\lambda = 0$) positiv.

Das von uns behandelte *Variationsproblem der isotropen Relativoberfläche* (28) ist jenes, das aus der Funktionentheorie als *Dirichletsches Problem* bekannt ist. Wir hatten es oben nur in parameterinvarianter Weise geschrieben. In der Tat weiß man aus der Potentialtheorie, daß die Extremalen des *Dirichletschen Integrals* (28) auf die *Laplacesche Gleichung* (30) als Lagrangesche Gleichung ihres Variationsproblems führen und absolute Minima des Integrals ergeben. Die *Integralflächen der Poten-*

tialgleichung (30) werden gerne als *Potentialflächen*[26]) bezeichnet. Wir können also sagen:

Die Potentialflächen (30) *übernehmen im isotropen Raume die Funktion seiner Minimalflächen. Ihre isotrope mittlere Krümmung H ist Null.*

Man weiß, daß sich (reelle) Flächen dieser Art auch durch die Real- oder Imaginärteile analytischer Funktionen in der einfachen Form

$$(8,31) \qquad z = \Re f(x+iy) \quad \text{oder} \quad z = \Im f(x+iy)$$

darstellen lassen, die als das *isotrope Gegenstück zur* WEIERSTRASSschen *Darstellung der euklidischen Minimalflächen* aufgefaßt werden kann.

Eine relativ-geometrische Auffassung der Potentialflächen als $\mathfrak{P}$-Minimalflächen findet sich schon bei E. MÜLLER[17a]).

89. Die assoziierten und adjungierten (konjugierten) isotropen Minimalflächen. Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle die ausführliche Theorie der isotropen Minimalflächen darzulegen. Sie wird der Gegenstand einer eigenen Abhandlung sein. Es scheint mir aber doch von Interesse, diese Theorie durch einige im Rahmen dieser Arbeit bleibende Bemerkungen schon jetzt zu beleuchten. Man möge sie nur als vorläufige Beispiele der angekündigten Note und als abschließende Beispiele zur vorliegenden Note auffassen.

Ist

$$(8,32) \qquad w = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$$

eine analytische Funktion der komplexen Variablen $x+iy$, so bilden die (reellen!) Flächen der Schar (α = reeller Parameter)

$$(8,33) \qquad \boxed{z = \tfrac{1}{2}\left[f(x+iy)\cdot e^{-i\alpha} + f(x-iy)\cdot e^{+i\alpha}\right]}$$

das genaue isotrope Gegenstück der euklidischen assoziierten Minimalflächen. Für Parameter α, die sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden, ergeben sich dann die adjungierten (oder konjugierten) Paare von isotropen Minimalflächen der Schar.

---

[26]) Auf die Vorstellung dieser Potentialflächen wird oft zur geometrischen Veranschaulichung des DIRICHLETschen Problems zurückgegriffen, z. B. auch von D. HILBERT, Über das DIRICHLETsche Prinzip. Crelle Journ. f. Math. **129** (1905), S. 63—67 (= Ges. Abhandl. III, Berlin 1935, S. 10—14). — Bekanntlich können sie auch als einfache geometrische Realisierungen RIEMANNscher Flächen analytischer Funktionen dienen, eine Vorstellung, die sich auch gerne bei F. KLEIN findet. Man vergleiche z. B. die Bemerkung in F. KLEIN, Ges. Abhandl. 2, Leipzig-Berlin, S. 77, Fußnote 23. — Verschiedene Modelle von Potentialflächen sind auf KLEINs Veranlassung von W. v. DYCK im Verlage von L. Brill (Darmstadt) herausgegeben worden.

Alle diese Flächen sind im isotropen Raume aufeinander (in einem genau zu präzisierenden Sinne) abwickelbar, nämlich mit (trivialer) Gleichheit der isotropen Bogenelemente, und (nicht trivialer) Gleichheit der Relativkrümmungen K. Im elementaren Sinne konjugierte Potentialflächen, wie etwa die Flächen

$$z = U(x, y) \quad \text{und} \quad z = V(x, y) \tag{8, 34}$$

sind dabei im Sinne unserer isotropen Definition adjungierte Minimalflächen. Dabei entsprechen einander (wie im euklidischen Falle) auf den adjungierten Minimalflächen wechselseitig die Asymptotenlinien und die isotropen Krümmungslinien.

Ähnliches gilt (im euklidischen Wortlaut) für die allgemeinere Zuordnung der assoziierten Minimalflächen, und auch für die sphärischen Bilder bleiben die euklidischen Sätze im Wesen aufrecht.

Mit den Potentialflächen scheint sich als erster vom (euklidischen) differentialgeometrischen Standpunkte aus U. Dini[27]) (1865) befaßt zu haben. Unsere allgemeinen assoziierten Minimalflächen treten (ohne isotrope Bedeutung) erstmalig bei K. Kommerell[28]) (1905) auf. Gewisse Eigenschaften der assoziierten und adjungierten Paare von Potentialflächen sind von den verschiedensten Autoren immer wieder von neuem entdeckt worden.

90. Das isotrope Gegenstück der Minimalfläche von Enneper. Man kennt im euklidischen Raume eine Reihe von besonderen Minimalflächen, denen aus verschiedenen Gründen erhöhtes Interesse zukommt. Im isotropen Raume gibt es zu diesen Flächen genaue Gegenstücke. Um wenigstens ein Beispiel dafür zu geben, will ich noch kurz *das isotrope Gegenstück der Enneperschen Minimalfläche* anführen.

Man kann diese Fläche in einer der beiden folgenden (konjugierten) Formen darstellen

$$z = \Re\,(x + iy)^{\frac{1}{3}} \qquad | \qquad z = \Im\,(x + iy)^{\frac{2}{3}} \tag{8, 35}$$

oder sie parametrisch so schreiben:

$$\begin{aligned} x &= u^3 - 3uv^2 & | \quad x &= u^3 - 3uv^2 \\ y &= 3u^2v - v^3 & | \quad y &= 3u^2v - v^3 \\ z &= u^2 - v^2 & | \quad z &= 2uv \end{aligned} \tag{8, 36}$$

[27]) U. Dini, Sulla teoria delle superficie. Giorn. di Mat. **3** (1865), S. 65–81; insbes. S. 78–81.

[28]) K. Kommerell, a) Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen. Math. Annalen **60** (1905), S. 548–596; insbes. § 13. — b) Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II. Berlin-Leipzig 1931, S. 181.

wobei die Parameterlinien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ die

isotropen Krümmungslinien | Asymptotenlinien

ergeben.

In der Tat sind *beide Flächen zueinander bewegungskongruent* und gehen, wie ihre cartesischen Gleichungen

(8, 37) $27(x^2+y^2)z^3+(x^2-y^2-4z^3)^3=0 \quad 27(x^2+y^2)z^3-(2xy+4z^3)^3=0$

zeigen, durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ auseinander hervor.

Die Ordnung der Fläche ist also (wie im euklidischen Falle) neun.

Schreibt man die Gleichung der nichtisotropen Ebenen mittels der Koordinaten (U, V, W) in der Form

(8, 38) $$z = Ux + Vy + W,$$

so findet man aus den Ebenengleichungen

(8, 39) $27(U^2+V^2)^2 \cdot W = 4(U^2-V^2) \quad | \quad 27(U^2+V^2)^2 \cdot W = 8UV$

als Klasse der isotropen Enneper-Fläche fünf.

Aus den auf Krümmungs- und Asymptotenparameter bezogenen Darstellungen (36) folgt, daß (wie im euklidischen Falle) die *Asymptotenlinien der isotropen Enneper-Fläche kubische Raumkurven* (nämlich isotrope Böschungslinien) und ihre *isotropen Krümmungslinien ebene Kubiken* sind. Die beiden konjugierten Flächen (36) liegen dabei so, daß sich die Grundrisse der Krümmungs- und Asymptotenlinien wechselseitig decken. Zusammen bilden sie zwei isotherme Netze in diagonaler Lage.

91. Die assoziierten isotropen Enneper-Flächen. Die im Sinne der Nr. **89** zu diesen beiden konjugierten Enneper-Flächen (35) *assoziierten isotropen Minimalflächen* lauten

(8.40) $$z = \Re[(x+iy)^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-i\alpha}]$$

oder

(8, 41) $$\begin{cases} x = u^3 - 3uv^2, \\ y = 3u^2v - v^3, \\ z = (u^2-v^2)\cos\alpha + 2uv \cdot \sin\alpha. \end{cases}$$

Sie sind gleichfalls untereinander und zu den beiden obigen isotropen Enneper-Flächen (36) *bewegungskongruent.* In der Tat gehen sie aus einer von ihnen, etwa der zu $\alpha = 0$ gehörigen Fläche (36, links) durch Drehung um die vollisotrope z-Achse um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ hervor; die zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gehörige konjugierte Fläche (36, rechts), entsteht dabei, wie erwähnt, durch Drehung um $\frac{\pi}{4}$.

Die assoziierten isotropen ENNEPER*-Flächen* (39) *sind* durch gleiche Parameter (u, v) so *aufeinander abgebildet*, daß sich entsprechende Punkte im Grundriß decken. Im isotropen Raume sind die Flächen daher *längentreu*, somit auch konform und *flächentreu* aufeinander bezogen. Darüber hinaus aber erfreuen sie sich der neuen, d. h. aus der Längentreue noch nicht folgenden, wichtigen Eigenschaft, der *Gleichheit der Relativkrümmungen* und der *Gleichheit der Relativoberflächen* korrespondierender Punkte bzw. Flächenstücke.

Die isotropen assoziierten ENNEPER*-Flächen sind daher* (Nr. 89) *unter Erhaltung der Relativoberflächen im isotropen Raume aufeinander abwickelbar.*

Man stellt leicht fest, daß die isotropen *sphärischen Bilder der Krümmungs- und Asymptotenlinien* unserer ENNEPER-Flächen (oder ihre Richtungsbilder im Sinne der Nr. 75), ähnlich dem euklidischen Falle, *parabolische Kreisbüschel* sind. Darum sind, wie erwähnt, die *Krümmungslinien ebene Kurven* und die *Asymptotenlinien isotrope Böschungslinien*[29]).

92. Erzeugung der isotropen (und euklidischen) Enneper-Flächen als quasielliptische Schiebflächen. Aus einem allgemeinen von mir gegebenen Theorem über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören[30]), kann man folgern, daß *die* ENNEPER*-Fläche des isotropen und des euklidischen Raumes sich in einem geeigneten quasielliptischen Raume durch* CLIFFORDsche *Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander als Schiebflächen erzeugen lassen.* Der Ausdruck „quasielliptisch" ist dabei im komplexen Sinne, d. h. mit zulässigen Realitätsverschiebungen des quasielliptischen Maßgebildes zu verstehen. Beide Flächen gehören damit (komplex gesehen) zu einer Klasse, auf welche W. BLASCHKE unlängst aufmerksam gemacht hat[31]).

Übrigens gehören sie auch in beiden Fällen zur Klasse der Affinminimalflächen.

[29]) Über die *isotropen Böschungslinien* vgl. K. STRUBECKER[1]), insbes. Nr. 26. — Auch im isotropen Raume ist für Böschungslinien das *Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant.*

[30]) K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. (Vorläufige Mitteilung.) Anzeiger der Akademie d. Wiss. Wien, Nr. 11 (1941).

[31]) W. BLASCHKE, Ebene Kinematik. Berlin-Leipzig, 1938, § 15.

(Eingegangen am 14. März 1942.)

Isoperimetrische Ungleichungen für konvexe Bereiche mit Ecken.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer längeren, in dieser Zeitschrift vor kurzem veröffentlichten Abhandlung[1]) bewies ich durch eine einfache, geometrisch-analytische Methode einige isoperimetrische Gleichungen und Ungleichungen, welche eine von ERHARD SCHMIDT behandelte Aufgabe zum Gegenstand hatten.

Diese Aufgabe beherrscht das ganze isoperimetrische Problem für den n-dimensionalen euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum und lautet in ihrer einfachsten Gestalt, die uns hier beschäftigen wird, folgendermaßen:

Unter allen, in einem Streifen einer gewöhnlichen Ebene eingeschriebenen, einfach geschlossenen Kurven von der Länge L soll diejenige bestimmt werden, welche das Maximum des eingeschlossenen Inhalts F aufweist[2]).

Die dort zugelassenen Kurven waren beliebig. Es ergab sich dann, daß das Maximum je nach dem Wert von L für zwei Typen von Extremalen eintreten kann, und zwar für die dort als linsenförmige bzw. als Kreis-Rechteck-Extremale bezeichneten Kurven.

Beschränkt man sich nur auf konvexe Kurven C, so kann die vorhin gestellte Aufgabe in dem Sinne verallgemeinert werden, daß man noch eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von Ecken E_i mit vorgeschriebenen Eckenwinkeln ψ_i vorgibt. Unter Eckenwinkel (vgl. Fig. 1) verstehen wir diejenigen Winkel, welche die Normalen auf die beiden Tangenten in dem betreffenden Winkel bilden. Dabei wird vorausgesetzt, daß E_i nicht auf den beiden Begrenzungsgeraden α, α' liegen. Für diese vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4

[1]) Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 677–737.

[2]) Isoperimetrische Aufgaben (besonders für konvexe Kurven) in Zusammenhang mit der Breite wurden schon früher behandelt, hauptsächlich von BONNESEN. Wenn an dieser Stelle nur ERHARD SCHMIDT genannt wird, so geschieht dies, weil dieser mit einer bewunderungswürdigen Konsequenz die Aufgabe verallgemeinerte und sie für alle drei Räume konstanter Krümmung, den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen, stellte und löste. Für die ältere Literatur vgl. man das Buch von BONNESEN-FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Springer, 1935. Die Arbeiten von SCHMIDT sind alle in der Math. Zeitschr. erschienen. Für genaue Angaben vgl. man meine in 1. zitierte Arbeit.

definieren wir als Eckenwinkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Winkel, welche die Halbtangenten in den betreffenden Ecken mit α bzw. α' bilden. Es werden noch alle $\omega_i < \frac{\pi}{2}$ genommen, wodurch diese Definition der ω_i im wesentlichen mit derjenigen von ψ_i zusammenfällt.

Wir behandeln zuerst folgende Aufgabe:

Unter allen konvexen Kurven, welche dem Streifen

$$-a \leqq x \leqq a \tag{1.1}$$

eingeschrieben sind und die eine Anzahl von „inneren" Ecken E_i mit vorgegebenen Eckenwinkeln ψ_i und dazu noch vorgegebene Randwinkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$ aufweisen, soll diejenige bestimmt werden, welche unter vorgegebenem L das Maximum von F aufweist.

Die Extremalen dieses Problems werden sich als der Gestalt nach nicht eindeutig bestimmte Kurven erweisen. Wie wir es ferner an der richtigen Stelle genauer feststellen werden, ist die gestellte Aufgabe nur dann lösbar, wenn L eine gewisse von ψ_i, ω_i und a abhängige Grenze überschreitet. Der Unterschied zwischen linsenförmigen und Kreis-Rechteck-Extremalen verschwindet hier, eigentlich bleiben nur die Kreis-Rechteck-Extremalen, und wir werden sehen, daß für feste ψ_i, ω_i alle Lösungen durch Bewegung von zwei Halbkreisen erhalten werden können. Nach Lösung dieser Aufgabe wird eine ähnliche behandelt, wobei an Stelle des Streifens (1.1) ein Winkelraum bzw. ein Dreieck T genommen wird. Beide Aufgaben führen zu interessanten Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung für ebene konvexe Kurven.

Für den Fall z. B. einer Kurve C, welche einem Dreieck T oder im Streifen (1.1) eingeschrieben ist, gilt

$$F - La + \pi a^2 \leqq -a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg}\frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) - a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg}\frac{\omega_i}{2} - \frac{\omega_i}{2}\right), \tag{1.2}$$

wenn dabei a den Radius des in T eingeschriebenen Kreises bedeutet, ψ_i die „inneren" Winkel und die ω_i die Winkel von C mit den Seiten des Dreiecks T, oder des Streifen (1.1) sind.

Wählt man in dieser Ungleichung das Dreieck T so, daß die ω_i mit gewissen ψ_i übereinstimmen, so erhalten wir

$$F - La + \pi a^2 \leqq -a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg}\frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) = -a^2 w. \tag{1.3}$$

Da nun (1.3) auch folgendermaßen geschrieben werden kann,

$$F - La + (\pi + \omega)a^2 = \left(F - \frac{L^2}{4(\pi + w)}\right) + \frac{1}{4(\pi + w)}(L - 2(\pi + w)a)^2 \leqq 0, \tag{1.4}$$

so folgt daraus die zuerst von G. Bol[3]) durch ganz andere Überlegungen bewiesene Ungleichung

$$4\pi F - L^2 \leqq -4F \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right). \tag{1.5}$$

Soll nun hier das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$L = 2\pi a + a \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) \tag{1.6}$$

sein, und zugleich in (1.3) das Gleichheitszeichen gelten. Da dies nur für Kappenbereiche der Fall ist, so ist der Extremalbereich von (1.5) wegen (1.6) ein Kappenbereich, dessen Form sich einfach bestimmen läßt.

Die hier befolgte Methode besteht in der Zuordnung[4]) der Punkte der gegebenen Kurve und einer geeignet gewählten „Extremalen" mittels paralleler Tangenten.

2. *Eine isoperimetrische Gleichung.* Wir betrachten zuerst in der xy-Ebene (Fig. 1) einen Streifen von der Breite $2a$ etwa

$$-a \leqq x \leqq a \tag{2.1}$$

und eine in ihm eingeschriebene konvexe Kurve C. Wir nennen eine Kurve C eingeschrieben in (2.1), wenn diese innerhalb dieses Streifens verläuft und mit den Begrenzungsgeraden α, α' gemeinsame Punkte hat.

Wir setzen voraus, C weist eine endliche oder abzählbar unendliche Anzahl von „inneren" Ecken E_i ($i = 1, 2, \ldots$) auf mit den Eckenwinkeln ψ_i und bildet mit α, α' die Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$, wie dies in der Fig. 1 dargestellt ist[5]).

Kurven, welche alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllen, werden im folgenden zulässige Kurven genannt.

Unser Ziel ist zuerst die Aufstellung einer allgemeinen Ungleichung, welche Länge und Inhalt[6]) einer zulässigen Kurve C mit den entsprechenden Größen einer „Extremalen" verbindet.

Dazu konstruieren wir in den Schnittpunkten AA' der Begrenzungsgeraden α, α' mit der x-Achse die Winkel $\gamma = \operatorname{Min}\{\omega_i\}$ (Fig. 1), und be-

[3]) G. Bol, Ein isoperimetrisches Problem. Nieuw Arch. v. Wiskunde **20** (1940), S. 171—175.

[4]) Für ähnliche Probleme auch von Bonnesen benutzt [vgl. z. B. Quelques problèmes isopérimétriques. Acta Math. **48** (1926), S. 123—178].

[5]) Damit es allerdings überhaupt eine konvexe Kurve C mit den Winkeln ψ_i und ω_i gibt, muß die selbstverständliche Bedingung

$$\sum_i \omega_i + \sum_i \psi_i \leqq 2\pi$$

erfüllt sein. Daraus folgt auch die Abzählbarkeit der Winkel.

[6]) Gemeint ist hier immer der Inhalt des von C begrenzten Bereiches $\mathfrak{R}$.

schreiben dann diejenigen Halbkreise K_1, K_2 mit dem Radius a, welche die Gerade α, α' und je zwei Seiten des so entstandenen Rhombus berühren, wie dies in der Fig. 1 gezeigt wird. Der Durchschnitt K der beiden Halbkreise K_1, K_2 bildet den „Kern" eines Kappenbereiches, der sich als sehr wichtig erweisen wird. Mit Hilfe von zwei Punkten auf α, α', z. B. B, B', kann man die beliebige „zulässige" Kurve C in zwei Teile C_1 bzw. C_2 zerlegen. Wir behaupten jetzt, daß es möglich ist, mit Hilfe paralleler Tangenten die Kurve C auf eine andere Kurve $\bar{C}$ abzubilden. Dafür betrachten wir irgendeine Stützgerade T von C, und setzen voraus, T hat mit C den Punkt M gemeinsam. Wir ordnen T diejenige zu ihr parallele Tangente T' zu, die K_1 oder K_2 entspricht, je nachdem M C_1 oder C_2 angehört. Auf diese Weise sind die Stützgeraden T von C den Tangenten T' von K_1, K_2 stetig und eindeutig zugeordnet. Wir betrachten zuerst ein Paar zugeordnete Tangenten, die nicht zur y-Achse parallel sind. Die durch $M(x, y)$ zur y-Achse parallele Gerade möge ihre zugeordnete T' in dem Punkt $\bar{M}$ mit Koordinaten x, η schneiden. Diesen Punkt ordnen wir dann dem Punkt M zu. Hat T mit C mehrere Punkte gemeinsam, so wird diese Konstruktion für jeden dieser Punkte wiederholt. Auf diese Weise sind (wegen der gemachten Voraussetzung über die ω_i) der Gesamtheit aller Punkte von C, welche nicht auf α, α' liegen, die Gesamtheit der Punkte $\bar{M}$ stetig zugeordnet, und zwar so, daß zwei verschiedenen M zwei verschiedene $\bar{M}$ entsprechen. Den Eckpunkten (und nur diesen) entsprechen mehrere Punkte $\bar{M}$, die alle auf einer Parallele zur y-Achse liegen. Den „Randpunkten" A_1, A_2, A_3, A_4[7]) ent-

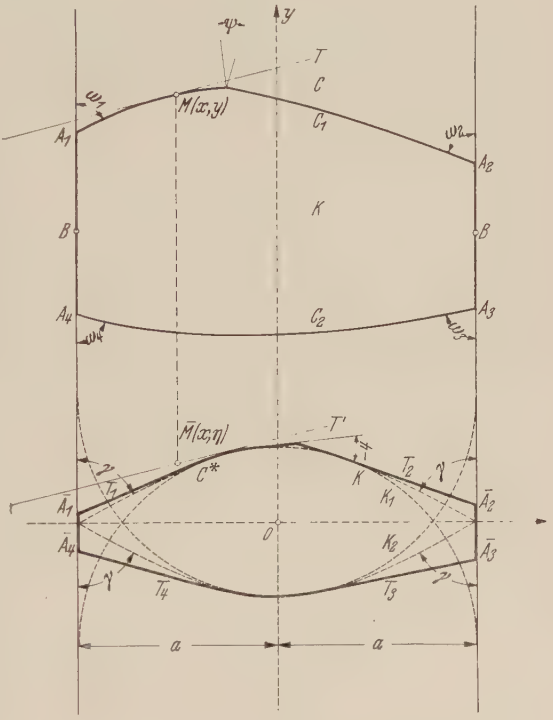

Fig. 1.

[7]) Hat C auf α oder α' nur eine „Randecke", so werden die entsprechenden A_i als zusammenfallende betrachtet. Diesem gemeinsamen Punkt entsprechen dann zwei $\bar{M}$ oder eins, je nachdem die zugehörigen ω_i verschieden oder gleich sind.

sprechen im allgemeinen vier Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{A}_4$. Die Zuordnung der Punkte zwischen A_1A_2 bzw. A_3A_4 zu den Punkten von $\bar{A}_1\bar{A}_2$, $\bar{A}_3\bar{A}_4$ wird im folgenden nicht gebraucht.

Die Punktmenge $\bar{M}$ begrenzt mit den zwei Geraden einen Bereich $\bar{\mathfrak{R}}$, den zugeordneten Bereich von $\mathfrak{R}$. Wir bezeichnen dessen Inhalt mit $\bar{F}$. Es seien nun $M(x, y)$ und $\bar{M}(x, \eta)$ zwei zugeordnete Punkte, und $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ die Richtungskosinusse der äußeren Normale n von C im Punkte M mit der x- bzw. y-Achse. Betrachten wir x, y als Funktionen der Bogenlänge s von C, so sind $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ solche Funktionen $\Phi(s)$ von s, daß immer $\Phi(s \pm 0)$ existiert.

Wir betrachten den Ausdruck

$$x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y), \tag{2. 2}$$

wenn M auf C_1 variiert. Liegt nun M nicht auf α bzw. α', so ist dieser Ausdruck, wie man aus der Abbildung gleich abliest, gleich a, da ja die Projektion eines Vektors mit Koordinaten x, $\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ in der Richtung $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ darstellt. Dasselbe gilt, wenn M mit A_1 bzw. A_2 übereinstimmt und $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ gleich $-\cos\omega_1$, $\sin\omega_1$ bzw. $\cos\omega_2$, $\sin\omega_2$ sind. Liegt M zwischen A_4A_1 oder A_2A_3, so ist $\cos(n, y) = 0$ und $x \cos(n, x) = a$. Die Beziehung

$$x \cos(n, x) + \left(\eta + a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a \tag{2. 3}$$

ist also für jeden Punkt von C_1 erfüllt. Ebenfalls bestätigt man die Gleichung

$$x \cos(n, x) + \left(\eta - a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y) = a \tag{2. 4}$$

für jeden Punkt von C_2.

Fassen wir diese beiden letzten Gleichungen zusammen, so erhalten wir nach Multiplikation mit ds und Integration über die ganze Kurve C

$$\int x \cos(n, x)\, ds + \int \left(\eta \pm a \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \cos(n, y)\, ds = aL. \tag{2. 5}$$

Im zweiten Integral wird allerdings $+$ oder $-$ genommen, je nachdem M auf C_1 oder C_2 liegt.

Wie man unmittelbar einsieht, stellt das erste Integral den Inhalt F von $\mathfrak{R}$ dar, während

$$\int_C \eta \cos(n, y)\, ds = \int_{-a}^{+a} \eta\, dx \tag{2. 6}$$

den Inhalt $\bar{F}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Hiermit erhalten wir die fundamentale Gleichung[8])

$$F + \overline{F} + 4\,a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = aL, \tag{2.7}$$

welche für jede zulässige Kurve C erfüllt ist.

3. *Die Extremalen.* Wir konstruieren jetzt eine Extremale unseres Problems folgendermaßen: Wir gehen zuerst vom Durchschnitt K der beiden Halbkreise K_1, K_2 aus und ziehen zuerst die 4 Tangenten T_1, T_2, T_3, T_4, welche mit α, α' die Winkel $\omega_1, \ldots, \omega_4$ bilden. Es sei M_i der Berührungspunkt von T_i mit dem zugehörigen Halbkreis. Wegen der Beziehung

$$\sum_1^4 \omega_i + \sum \psi_i \leqq 2\pi \tag{3.1}$$

ist es jetzt möglich, in den freien Bögen M_1M_2 und M_3M_4 Kappen mit den Winkeln ψ_i anzusetzen, welche außer höchstens Randpunkten keine gemeinsamen Punkte besitzen. Unter einer Kappe $\mathfrak{K}_i$ verstehen wir allerdings die Figur, die von einem Kreisbogen (von K_1 oder K_2) und zwei Tangenten, die sich unter einem Winkel ψ_i schneiden, begrenzt ist. Der einer zulässigen Kurve C entsprechende Kappenbereich wird noch durch die Forderung festgelegt, daß die Tangenten, welche die Kappe von dem Winkel ψ_i bestimmen, zu den Halbtangenten der Ecke E_i (mit dem vorgeschriebenen Winkel ψ_i) parallel sind. Durch diese Festlegung sind jeder zulässigen geschlossenen Kurve C, d. h. jeder Kurve, welche die in Nr. 2 gestellten Forderungen erfüllt, ein der Gestalt nach eindeutig bestimmter Kappenbereich zugeordnet. Diesen Kappenbereich bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}^*$. Die Bedeutung von $\mathfrak{K}^*$ besteht in folgender Extremaleigenschaft: *Es gilt*

$$\overline{\mathfrak{K}}^* = \mathfrak{K}^* \tag{3.2}$$

und infolgedessen

$$\overline{F}^* = F^*. \tag{3.3}$$

Um nun (2. 9) weiter umzuformen, wiederholen wir die Rechnungen von Nr. 2 mit $\mathfrak{K}^*$ an Stelle des von C begrenzten Bereiches $\mathfrak{K}$ unter Berücksichtigung von (3. 3). Wir erhalten dann

$$F^* + F^* + 4\,a^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = aL^*, \tag{3.4}$$

wobei L^* die Länge der Begrenzung C^* von $\mathfrak{K}^*$ bedeutet. Durch Subtraktion von (2. 9) folgt dann

$$F - F^* = a\,(L - L^*) - (\overline{F} - F^*). \tag{3.5}$$

Wie unmittelbar aus der Konstruktion von $\overline{\mathfrak{K}}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$ folgt, ist der zweite Bereich immer im ersten enthalten und somit stellt die nicht negative Differenz $\overline{F} - F^*$ tatsächlich ein Restglied dar.

[8]) Für $\gamma = 0$ wurde diese Ungleichung zuerst von Bonnesen abgeleitet (l. c. S. 153).

Die Ungleichung (3. 5) gilt auch für $\gamma = 0$. In diesem Fall besteht der Kern des Kappenbereiches aus dem Kreis mit Radius a, der α. α' in A, A' berührt.

4. *Weitere isoperimetrische Gleichungen.* Um weitere isoperimetrische Gleichungen zu erhalten, schneiden wir die Begrenzung C^* von $\mathfrak{K}^*$ in den Punkten A, A' durch und ziehen die beiden Teile von C^* wie zwei Teile eines Teleskops auseinander. Werden diese beiden Teile um q voneinander entfernt, so beträgt der Inhalt F_q^* der so entstandenen Figur $\mathfrak{K}_q^*$, $F^* + 2aq$, während sein Rand C_q^* die Länge $L_q^* = L^* + 2q$ besitzt. Ebenfalls wird der neue Wert von $\overline{F}_q$ (in bezug auf die neu entstandene Figur des Rechtecks mit den zwei angesetzten Halbkreisen, wenn q genügend groß ist) gleich $\overline{F}_q = \overline{F} + 2aq$, und man erhält aus (3. 5) wegen

$$\overline{F} - F^* = \overline{F}_q - F_q^*, \quad F^* - aL^* = F_q^* - aL_q^*, \tag{4. 1}$$

die zweite wichtige isoperimetrische Gleichung

$$F - F_q^* = a(L - L_q^*) - (\overline{F}_q - F_q^*). \tag{4. 2}$$

Hier spielt wieder der Ausdruck $\overline{F}_q - F_q^* \geqq 0$ die Rolle eines Restgliedes, das dann und nur dann verschwindet, wenn C mit der zugehörigen C_q^* übereinstimmt.

Die Gleichung (4. 2), welche für $q = 0$ mit der (3. 5) identisch ist ($\mathfrak{K}_0^*$ ist dann mit dem früheren $\mathfrak{K}^*$ identisch), enthält eine vollständige Beantwortung der in Nr. 2 gestellten Aufgabe. Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Satz zusammen:

Für vorgegebene ω_i, ψ_i und L hat die Aufgabe eine Lösung, wenn

$$L \geqq L^* \tag{4. 3}$$

ist, wobei L^* den Rand des in Nr. 3 konstruierten Kappenbereiches $\mathfrak{K}^*$ ist. Ist diese Ungleichung erfüllt, so ist die Extremale eine C_q^* mit $L = L_q^*$.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus (4. 2) unmittelbar, wenn man dort q so wählt, daß $L = L_q^*$ wird. Wegen

$$L_q^* = L^* + 2aq \tag{4. 4}$$

ist der Wert von q durch die Forderung $L = L_q^*$ eindeutig bestimmt. Dagegen ist die Gestalt der Extremalen nicht eindeutig bestimmt, da im Falle des Eintreffens des Gleichheitszeichens in $F - F^* \leqq 0$ nur

$$\overline{F} = F_q^* \tag{4. 5}$$

sein muß. Hier tritt das Gleichheitszeichen für alle Kappenbereiche $\mathfrak{K}^*$ mit den Winkeln ψ_i, ω_i ein, die man aus einer derselben durch Verschiebung der Ecken und eventuelle Vertauschung der Kappen erhalten kann. Denn alle

diese Kappenbereiche haben denselben Inhalt F^* und dieselbe Länge L^* bzw. L_q^*[9]).

Zum Beweis dieser Tatsache erinnern wir nochmals an die Konstruktion von $\mathfrak{K}_q^*$.

Der Bereich $\mathfrak{K}^*$ mit den Winkeln γ_i, ω_i wird in A, A' durchgeschnitten. Danach werden die beiden Teile so weit auseinandergezogen, bis die Gesamtlänge L_q^* des Randes C_q^* des so entstandenen Bereiches die Länge L erreicht.

Nun zeigt ein Blick auf die Konstruktion von $\mathfrak{K}_q^*$ und $\overline{\mathfrak{K}}_q$, daß (4. 5) dann und nur dann besteht, wenn die Ecken von C mit den entsprechenden Ecken des Randes C^* auf denselben Parallelen zur y-Achse liegen. Da diese Tatsache durch q nicht gestört wird, trifft dies auch für $\mathfrak{K}_q^*$ zu. Wäre nämlich dies für eine Ecke E_i nicht der Fall, so käme, wie man leicht einsieht, zum Bereich $\overline{\mathfrak{K}}$ ein Dreieck von nicht verschwindendem Inhalt hinzu, der $\mathfrak{K}^*$ nicht angehören würde. Da nun aus (4. 5) noch folgt, daß die Begrenzungen $\overline{C}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ und C_q^* übereinstimmen, so ergibt sich also (eventuell mit Ausnahme einer abzählbaren Menge

$$\frac{dx}{d\bar{s}} = \frac{dx}{d\bar{s}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{d\bar{s}}, \tag{4. 6}$$

wenn $\bar{s}$ die Bogenlänge von C_q^* bedeutet. Da es sich bei C um eine konvexe Kurve handelt, so folgt aus der ersten Differentialgleichung $\bar{s} = s + \text{konst}$, und aus der zweiten

$$y = \eta + \text{konst}. \tag{4. 7}$$

Daraus folgt, daß $\overline{\mathfrak{K}}$ durch Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ entsteht. Da nun (4. 5) gelten muß, und $\mathfrak{K}_q^*$ konvex ist, entsteht $\mathfrak{K}$ durch Parallelverschiebung seines Kappenbereiches und ist hiermit mit diesem kongruent. Nimmt man jetzt als C irgendeinen „zulässigen" Kappenbereich, so sind alle Bedingungen für das Eintreffen von (4. 5) erfüllt. Da umgekehrt für das Eintreffen von (4. 5) die Übereinstimmung von C und C_q^* erforderlich ist, so folgt daraus, daß (4. 5) nur für Kappenbereiche und nur für diese erfüllt ist. Hiermit ist auch der Beweis des Satzes erbracht worden.

5. *Der Fall eines Winkelraumes.* Wir beschäftigen uns im folgenden mit einer allgemeinen Aufgabe, die sich auf konvexe Kurven mit Ecken bezieht, die in einem Dreieck eingeschrieben sind.

Wir behandeln zuerst folgende speziellere Aufgabe: Es soll ein konvexer Kurvenbogen C bestimmt werden, der zwei Punkte zweier sich schneidender Geraden verbindet (Fig. 2) so, daß der Ausdruck $J - aS$ mit einem festen a ein Maximum wird.

[9]) Bei festgehaltenem q.

Dabei sind J und S folgendermaßen definiert: Der Kreis K_0 mit dem Radius a möge α bzw. α' in A bzw. A' berühren. Die Radien OA, OA' und der Kurvenbogen C bestimmen einen Bereich $OABCB'A'O$, dessen

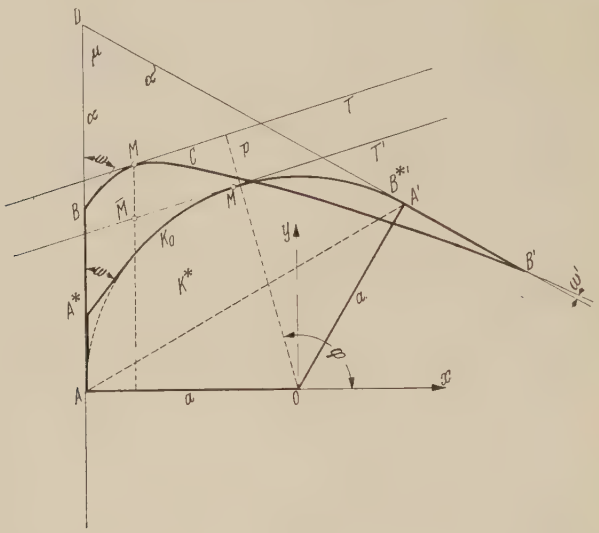

Fig. 2.

algebraischer Inhalt mit J bezeichnet werden soll. Damit wird gemeint, daß J gleich etwa dem Integral

$$J = \int xy'\,ds \tag{5.1}$$

erstreckt in dem üblichen positiven Sinn längs der nicht notwendig konvexen Kurve $AOA'B'BA$ gesetzt werden kann, wobei ds das Bogenelement dieser Kurve bezeichnet.

Ferner ist S gleich der Summe

$$(AB) + \text{Länge } C + (A'B'),$$

wobei (AB) bzw. $(A'B')$ positiv sind, falls die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{A'B'}$ nach der Spitze D zeigen, und negativ im entgegengesetzten Fall. In der Figur ist z. B. (AB) positiv und $(A'B')$ negativ gezeichnet.

Wir machen noch folgende Voraussetzungen über die Ecken von C:

1) C bildet mit α bzw. α' die Winkel ω, ω' und 2) C besitzt endlich oder abzählbar unendlich viele Ecken, in denen die Normalen nach der früheren Definition die Winkel ψ_i bilden. Diese Winkel erfüllen die für die Lösung der Aufgabe selbstverständliche Bedingung

$$\omega + \omega' + \sum_i \psi_i + \mu \leqq \pi. \tag{5.2}$$

Daß es solche Kurven gibt, werden wir sofort bei der Konstruktion der Extremalen sehen.

Wir wiederholen nun unsere Konstruktion von Nr. 2. mittels paralleler Tangenten auf die beiden Gebiete $OAK_0A'O$ und $OABCB'A'O$. Einem inneren Punkt M von C werden folgende Punkte zugeordnet:

Es sei T eine durch M gehende Stützgerade von C und T' diejenige Tangente von dem Bogen K_0, welche zur T parallel ist. Die durch M zu α parallele Gerade trifft T' in einem Punkt $\overline{M}$, den wir dann M zuordnen. Gehen mehrere Stützgeraden durch M, so werden diesem Punkt mehrere Punkte zugeordnet. Für die übrigen Punkte des Zuges $OABCB'A'O$ führen wir die Zuordnung folgendermaßen durch: Die Punkte von OA, OA' werden sich selbst zugeordnet, ebenfalls die Punkte der Strecke $A'B'$. Für die Punkte der Strecke AB definieren wir die zugeordneten Punkte durch Stetigkeit. Es sei wie in 2. T eine Stützgerade mit Normalrichtung φ. Ist $p(\varphi)$ die Entfernung von T zum Nullpunkt 0 und sind x, y die Koordinaten von M und x, η diejenigen von $\overline{M}$, so ist

$$\eta = y - \frac{p-a}{\sin \varphi}. \tag{5. 3}$$

Nun ist $p(\pi) = a$, es gilt also, wenn man $\varphi \to \pi - 0$ konvergieren läßt,

$$\eta_B = y_B - p'(\pi - 0) = y_B - y_B = 0. \tag{5. 3}$$

Die Stetigkeit der Zuordnung wird also bewahrt, wenn man den Punkten der Strecke AB die Punkte von AA^* mittels paralleler Stützgeraden zugeordnet, wobei noch A sich selbst zugeordnet wird. Entsprechendes gilt für die Punkte der Strecke $A'B'$.

Durch diese Zuordnung entsteht aus der Menge der Punkte M von $OABCB'A'O$ eine Punktmenge $(\overline{M})$, welche eine geschlossene Kurve $\overline{C}$ bildet. Wir bezeichnen den von $\overline{C}$ eingeschlossenen Bereich mit $\overline{\mathfrak{K}}$. Es ist einfach zu sehen, daß $\overline{\mathfrak{K}}$ den Kappenbereich $\mathfrak{K}^*$ von C in sich enthält. Dieser letzte Bereich entsteht aus dem Kreissegment $OAK_0A'O$, wenn man ihm die durch die ω, ω' und γ_i bestimmten Kappen ansetzt. Wir bezeichnen im folgenden mit $\overline{J}$ den Inhalt des durch $\overline{C}$ begrenzten Bereiches $\overline{\mathfrak{K}}$ und mit J^* dasjenige von $\mathfrak{K}^*$. Es seien nun $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ die Richtungskosinusse der „äußeren" Normalen von $OABC'B'A'O$. Diese sind so definiert, daß bei dem üblichen positiven Durchlaufsinn n nach rechts gerichtet wird.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$x \cos(n, x) + \eta \cos(n, y) \tag{5. 2}$$

und behaupten, daß für jeden Punkt von $ABCB'A'$ dieser Ausdruck gleich a ist. Diese Behauptung ist trivial insofern, als $M(x, y)$ ein innerer Punkt von C ist.

Liegt nun M auf AB, so ist $x = -a$, $\cos(n, x) = -1$ und $\cos(n, y) = 0$, also (5. 2) ist erfüllt. Dasselbe gilt aber, wenn M auf $B'A'$ liegt, da ja für diese Strecke dieser Ausdruck gleich $OA' = a$ ist. Auf beiden Radien OA, OA' ist

der Ausdruck Null. Integriert man nun (5. 2) längs des Zuges $OABCB'A'O$, so erhält man mit Rücksicht auf die Definition von S

$$\int x \cos(n, x)\, ds + \int \eta \cos(n, y)\, ds = aS. \tag{5. 3}$$

Das erste Integral links ist jetzt, da $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$ ist, gleich dem Inhalt J von $OABCB'A'O$, und das zweite Integral wegen $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$ gleich dem Inhalt $\overline{J}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$. Es sind also

$$J + \overline{J} = aS. \tag{5. 4}$$

Wir konstruieren jetzt von Segment K_0 ausgehend folgende „Extremalkurve" C^*. Wir ziehen zuerst die zwei Tangenten an K_0, welche mit α bzw. α' die Winkel ω bzw. ω' bilden, und setzen dann auf dem freien Bogen von K_0 die Kappen mit Winkeln ψ_i auf. Die so konstruierte Kurve C^* begrenzt mit OA, OA' einen Bereich $\mathfrak{K}^*$, der einer von den vielen möglichen Kappenbereichen von C ist. Nun gilt für den so konstruierten Bereich $\mathfrak{K}^*$, $\overline{\mathfrak{K}}^* = \mathfrak{K}^*$ und wir erhalten, wenn J^* den Inhalt von $\mathfrak{K}^*$ und S^* die Länge von C^* bedeutet,

$$J + J^* = aS^* \text{ [10]}. \tag{5. 5}$$

Durch Kombination mit (5. 4) folgt dann

$$J - J^* = a(S - S^*) - (J - J^*). \tag{5. 6}$$

Man kann ebenso wie vorhin zeigen, daß $\overline{J} \geqq J^*$ ist, also daß die Ungleichung

$$J - J^* \leqq a(S - S^*) \tag{5. 7}$$

gilt.

Daß hier das Gleichheitszeichen nur dann eintritt, wenn C mit C^* übereinstimmt, wird im folgenden im Zusammenhang mit einer allgemeineren Aufgabe gezeigt werden.

6. *Der Fall eines Dreiecks.* Wir betrachten nun eine in einem Dreieck T eingeschriebene konvexe Kurve C (Fig. 3), d. h. eine Kurve, welche mit jeder Seite von T gemeinsame Punkte hat. Es sei K der in T eingeschriebene Kreis und a sein Radius. Es seien ψ_i die Eckenwinkel von C, welche nicht auf den Seiten a_1, a_2, a_3 von T liegen, und ω_i, ω_i' $(i = 1, 2, 3)$ die Winkel von C mit den drei Seiten, wie dies in der Figur gezeichnet ist. Wenden wir unsere Konstruktion auf die Geraden a_1, a_2, a_2, a_3 und a_3, a_1 an, und addieren wir die entsprechenden Größen (mit den Indizes 3 für a_1a_2, 1 für a_2a_3 und 2 für a_3a_1), so wird wegen

$$L = \sum_1^3 S_i, \quad F = \sum_1^3 J_i, \quad F^* = \sum_1^3 J_i^*, \quad \overline{F} = \sum_1^3 \overline{F}_i, \tag{6. 1}$$

$$F + \overline{F} = aL \text{ [11]}. \tag{6. 2}$$

[10]) C^* ist der Rand von $\mathfrak{K}^*$ ohne die Radien OA, OA'. Diese Gleichung wurde zuerst von BONNESEN bewiesen. BONNESEN, l. c. S. 153.

[11]) BONNESEN, l. c. S. 153.

Für den Kappenbereich $\mathfrak{K}^*$ von C mit den Winkeln ω_i, ω_i' und ψ_i erhält man dann durch ähnliches Verfahren wegen $F^* = \overline{F}^*$

$$F^* + F^* = aL \tag{6. 3}$$

also

$$F - F^* = a\,(L - L^*) - (\overline{F} - F^*). \tag{6. 4}$$

Wegen $\overline{F} \geqq F^*$ gilt nun

$$F - F^* \leqq a\,(L - L^*). \tag{6. 5}$$

und das Gleichheitszeichen tritt hier nur dann ein, wenn $\overline{F} = F^*$ ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn $\overline{J}_i = J_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ ist, wodurch alles auf

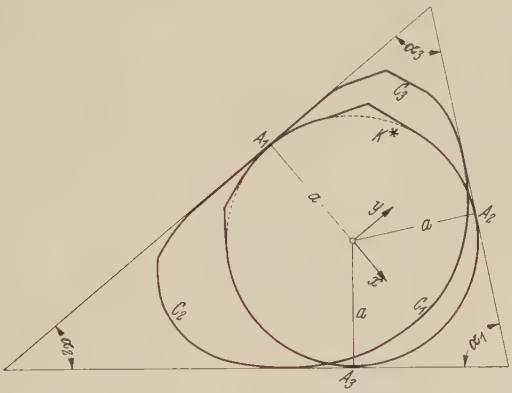

Fig. 3.

das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5. 7) zurückgeführt ist. Nun kann man durch ähnliche Überlegungen wie in 2. schließen, daß die für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (5. 7) gestellte Bedingung dann und nur dann erfüllt wird, wenn erstens

$$y = \eta + \text{konst} \tag{6. 6}$$

ist, und zweitens, wenn B' mit der Ecke $B^{*\prime}$ des Kappenbereiches zusammenfällt. Sonst würde noch ein Dreieck von nicht verschwindendem positivem Inhalt enthalten, was $\overline{J} > J^*$ zur Folge haben würde. Dies erfordert also, daß die Konstante in (6. 6) verschwinden muß. Die Kurven C und C^* fallen also zusammen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für die drei Teile C_1, C_2, C_3 von C in der Fig. 3 können wir schließen, daß das Gleichheitszeichen in (6. 5) nur dann eintritt, wenn die geschlossene Kurve C mit dem Rand ihres Kappenbereiches $\mathfrak{K}^*$ übereinstimmt.

Diesen erhält man, wenn man zuerst Tangenten an K_0 zieht, welche mit a_i die Winkel ω_i, ω_i' bilden und dann die Kappen mit den Winkeln ψ_i auf den freien Bögen ansetzt.

Damit die Konstruktion möglich ist, muß

$$\sum_1^3 (\omega_i + \omega_i') + \sum_1^3 \alpha_i + \sum_i \psi_i \leqq 3\pi \tag{6.7}$$

sein, oder wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

$$\sum_1^3 (\omega_i + \omega_i') + \sum \psi_i \leqq 2\pi. \tag{6.8}$$

7. *Anwendungen. Die Verschärfung von* Bol. Als Anwendung der Ungleichungen (6.5) und (3.5) soll zum Schluß der Beweis einer schon in der Einleitung erwähnten interessanten Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch Bol gegeben werden. Es sei eine konvexe Kurve C in der Ebene gegeben mit den Eckenwinkeln ψ. Es ist immer möglich, C in einem Dreieck oder in einem Streifen in dem vorhin erklärten Sinne einzuschreiben derart, daß jede Seite von T entweder eine Strecke mit C gemeinsam hat oder daß sie eine Voll- oder Halbtangente ist. Hierbei fallen die ω_i, ω_i' mit gewissen ψ_i zusammen und man erhält in beiden Fällen

$$F^* = \pi a^2 + a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right), \tag{7.1}$$

$$F - La + \pi a^2 \leqq a^2 \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right). \tag{7.2}$$

Bezeichnen wir mit w die Summe rechts in (7.1) und setzt man noch $\pi + w = Q$, so wird

$$F - La + Q a^2 = \left(F - \frac{L^2}{4Q}\right) + \frac{1}{4Q}(L - 2aQ)^2 \leqq 0. \tag{7.3}$$

Daraus folgt die Verschärfung von Bol

$$4(\pi + w) F \leqq L^2,$$

oder

$$4\pi F - L^2 \leqq -4F \sum_i \left(\operatorname{tg} \frac{\psi_i}{2} - \frac{\psi_i}{2}\right) \tag{7.4}$$

unmittelbar.

Soll in (7.4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß

$$L - 2aQ = 0 \tag{7.5}$$

sein, und dies hat wieder das Eintreten des Gleichheitszeichens in (7.2) zur Folge. Durch Kombination dieser Gleichung mit den Extremalfällen von (3.5) und (6.5), folgt nun leicht, daß C Kappenbereich eines Kreises vom Radius a sein muß

(Eingegangen am 6. Februar 1942.)

Über das Riemannsche Summierungsverfahren.

Von

Nikola Obreschkoff in Sofia.

In der Theorie der Eindeutigkeit der Darstellung durch trigonometrische Reihen spielt der folgende klassische Satz von Riemann die Hauptrolle:

Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

konvergent, so ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 \tag{2}$$

für jedes h konvergent und ihre Summe strebt gegen jene der Reihe (1), falls $h \to 0$. Es kann aber vorkommen, daß die Reihe (2) bei $h \to 0$ konvergent ist und eine bestimmte Grenze besitzt, ohne daß die Reihe (1) selbst konvergiert. Man erhält dadurch eine Summierung divergenter Reihen, die verallgemeinert folgendermaßen lautet: Die Reihe (1) ist nach dem Riemannschen Verfahren von der Ordnung $\varkappa$ summierbar ($\varkappa \geq 0$, ganz), oder kurz $(R, \varkappa)$-summierbar, mit der Summe s, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^{\varkappa} \tag{3}$$

für jedes h konvergiert und ihre Summe mit $h \to 0$ gegen s strebt. L. Fejér[1]) zeigte, daß jede $(C, 1)$-summierbare Reihe auch mit derselben Summe $(R, 4)$-summierbar ist. Ein allgemeineres Ergebnis bewies E. Kogbetliantz[2]), nämlich das folgende: Jede (C, α)-summierbare Reihe, $0 < \alpha < p - 1$, ist (R, p)-summierbar mit derselben Summe.

In der vorliegenden Arbeit werden genauere Ergebnisse über die Abhängigkeit zwischen den Summierungen von Cesaro und Riemann angegeben. Außerdem werden wir eine Summierung betrachten, die in Ver-

[1]) L. Fejér, Untersuchungen über Fourierscheе Reihen. Math. Annalen **58** (1904), S. 501—569.

[2]) E. Kogbetliantz, Recherches sur l'unicité des série ultrasphériques. Journ. de Mathématiques pures et appliquées **5** (1924), S. 125—196.

bindung mit dem zweiten Satz von RIEMANN steht, der sich folgendermaßen ausdrücken läßt: Ist $a_n \to 0$, so strebt die Summe der Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$$

gegen Null, falls $h \to 0$.

1. Einige Hilfssätze.

Wir werden im voraus einige Hilfssätze aufstellen, die für unsere Entwicklungen notwendig sind. Wir bezeichnen dabei mit $s_n^{(\alpha)}$ die CESÀROschen Mittelwerte der Ordnung α.

1. *Hat man für ein* $\alpha > 0$:

$$|s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n),$$

so ist für jedes $\beta > \alpha$ *auch*

$$|s_0^{(\beta)}| + |s_1^{(\beta)}| + \cdots + |s_n^{(\beta)}| = O(n).$$

Wir können uns auf den Fall $\beta - \alpha = \delta < 1$ beschränken. Wegen

$$s_n^{(\beta)} = \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} s_\nu^{(\alpha)}, \quad A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n} \tag{1}$$

ist dann

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} |s_n^{(\beta)}| &\leqq \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \\
&= \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{(\alpha)} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{m} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\
&< \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{A_{n-\nu}^{\delta-1}}{A_n^{\beta}} \\
&< K \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(n+1-\nu)^{\delta-1}}{n^{\beta}} \\
&< K_1 \sum_{\nu=0}^{m} (\nu+1)^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| \int_{\nu}^{\infty} \frac{(x-\nu)^{\delta-1}}{x^{\beta}}\, dx < K_2 \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}|.
\end{aligned}$$

2. *Ist* $\alpha < p - 1$, $q_n \geqq 0$, *so folgt aus*

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_n = O(n) \tag{2}$$

die Beziehung

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty, \tag{3}$$

und umgekehrt.

Setzen wir

$$\sigma_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n,$$

so haben wir:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}} = -\frac{\sigma_m}{(m+1)^{p-\alpha}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \sigma_n \left[\frac{1}{n^{p-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{p-\alpha}}\right]$$

$$= O\left(\frac{m}{m^{p-\alpha}}\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} O(n)\, O\left(\frac{1}{n^{p-\alpha+1}}\right) = O\left(\frac{1}{m^{p-\alpha+1}}\right).$$

Ist umgekehrt (3) richtig, so erhalten wir, wenn wir

$$T_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{q_n}{n^{p-\alpha}}$$

setzen, für die Summe

$$t_m = q_0 + q_1 + \cdots + q_m$$

den Ausdruck

$$t_m = \sum_{n=1}^{m} n^{p-\alpha}(T_{n-1} - T_n) = T_0 - m^{p-\alpha} T_{m+1} + \sum_{n=1}^{m} T_n [n^{p-\alpha} - (n-1)^{p-\alpha}]$$
$$= T_0 + O(m) + O(m) = O(m).$$

3. *Es bezeichne $\varphi(x)$ die Funktion*

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p,$$

worin p eine positive ganze Zahl bedeutet. Dann gilt für die m-te Differenz der $\varphi(nx)$ und für reelles x:

$$|\Delta^m \varphi(nx)| \leqq M \frac{|x|^{m-p}}{n^p}, \tag{4}$$

worin M von x und n unabhängig ist.

In der Tat haben wir:

$$|\Delta^m \varphi(nx)| \leqq |x|^m \max_{n \leqq t \leqq n+m} |\varphi^{(m)}(tx)|. \tag{5}$$

Man sieht leicht, daß

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqq M_1 |x|^{-p} \tag{6}$$

ist für jedes reelle x. Setzen wir nämlich

$$u = \sin^p x, \quad v = x^{-p},$$

so wird:

$$\varphi^{(m)}(x) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} u^{(m-\mu)} v^{(\mu)},$$

und da wir bei $|x| \geqq a > 0$ auch $u^{(\nu)} = O(1)$ haben, erhalten wir:

$$\varphi^{(m)}(x) = O(|x|^{-p}),$$

für $|x| \geqq a$. Bei $|x| < a$ folgt (6) sofort aus der Entwicklung:

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^p,$$

welche

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqq L < M|x|^{-p}$$

liefert.

4. *Es sei δ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl und*

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h). \tag{7}$$

Dann haben wir für jedes $h \neq 0$

$$|g_n| < M n^{-p} |h|^{-\delta},$$

worin M von h und n unabhängig ist,

Da $A_n^{\delta-1} = O(n^{\delta-1})$, so ersieht man aus dem Hilfssatz 3, daß die Reihe (7) für jedes $h > 0$ konvergiert. Bezeichnen wir mit q die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl, so haben wir

$$g_n = \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) + \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h) = g_n' + g_n''.$$

Aus dem Hilfssatz 3 folgt aber

$$|\Delta^p \varphi(n h)| < M \frac{h^p}{n^p h^p} < M n^{-p},$$

so daß wir für g_n':

$$|g_n'| < M \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} \frac{1}{\nu^p} < M n^{-p} \sum_{\nu=n}^{n+q} A_{\nu-n}^{\delta-1} = M n^{-p} A_q^{\delta}$$
$$< M_1 n^{-p} h^{-\delta},$$

und für g_n'':

$$g_n'' = -\sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} A_{\nu-n+1}^{\delta-2} [\Delta^{p-1} \varphi(n + q + 1\, h) - \Delta^{p-1} \varphi(\nu + 1\, h)],$$

$$|g_n''| < K n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} + K_1 h^{-1} \sum_{\nu=n+q-1}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^p (\nu-n)^{2-\delta}}$$
$$< K' n^{-p} h^{-1} q^{\delta-1} + K_1' n^{-p} h^{-1} \sum_{\nu=n+q+1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-n)^{2-\delta}} = O(n^{-p} h^{-\delta})$$

erhalten. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

5. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und Ableitungen bis zur p-ten Ordnung zulassende Funktion, welche den Bedingungen*

$$|\varphi(x)| < K, \quad x^p |\varphi^{(p)}(x)| < K, \tag{8}$$

für jedes $x > 0$ genügt, worin K von x unabhängig ist. Dann haben wir für jedes $m < p$ die Beziehung

$$x^m |\varphi^{(m)}(x)| < K', \quad x > 0, \tag{9}$$

in der K' von x unabhängig ist.

In der Tat folgt aus der Taylorschen Formel für

$$\varphi(x+t) = \varphi(x) + t\varphi'(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \frac{t^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta t), \quad 0 < \theta < 1. \tag{10}$$

Es seien jetzt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ beliebig gewählte verschiedene positive Zahlen und es werde in (10) noch $t = \lambda_i x$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, gesetzt. Dann erhält man die $(p-1)$ Gleichungen

$$\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x) + \lambda_i x\varphi'(x) + \frac{\lambda_i^2 x^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{\lambda_i^{p-1} x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \frac{\lambda_i^p x^p}{p!}\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x), \quad 0 < \theta_i < 1. \tag{11}$$

Es mögen ferner $C_1, C_2, \ldots C_{p-1}$ die Zahlen bedeuten, die sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1} = 0,\\
&C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1\lambda_1^{p-2} + C_2\lambda_2^{p-2} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-2} = 0,\\
&C_1\lambda_1^{p-1} + C_2\lambda_2^{p-1} + \cdots + C_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1} = 1
\end{aligned} \tag{12}$$

ergeben. Dieses System besitzt Lösungen, da die Determinante der Koeffizienten vor den Unbekannten die von Vandermondesche ist und folglich von Null verschieden ausfällt. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ und addieren die so entstandenen Produkte, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{p-1} C_i\varphi(x+\lambda_i x) = \varphi(x)\sum_{i=1}^{p-1} C_i + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(x) + \frac{x^p}{p!}\sum_{i=1}^{p-1} C_i\lambda_i^p\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x). \tag{13}$$

Da wir für jedes $x > 0$

$$|\varphi(x+\lambda_i x)| < M, \quad |\varphi^{(p)}(x+\theta_i\lambda_i x)| < \frac{M}{(1+\theta_i\lambda_i)^p x^p} < \frac{M}{x^p}$$

haben, so erhalten wir aus (13) sofort:

$$x^{p-1}|\varphi^{(p-1)}(x)| < M'. \tag{14}$$

Aus demselben Grunde werden wir aus (14)

$$x^{p-2}|\varphi^{(p-2)}(x)| < M''$$

erhalten usw.

6. *Es sei $p > 1$ eine ganze Zahl. Dann ist*

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p = \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx = j_p.$$

Es sei $a > 0$ eine beliebige Zahl und es bedeute m die größte in $\frac{a}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Gemäß der Definition eines bestimmten Integrals haben wir dann zunächst

$$\lim_{h\to 0} h\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p = \int_0^{a}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx.$$

Und für die Summe

$$i_h = h\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p$$

erhalten wir

$$|i_h| < h\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^p h^p} < \frac{1}{h^{p-1}}\int_m^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1)h^{p-1}m^{p-1}} < \frac{1}{(p-1)(a-1)^{p-1}}.$$

Wir können aber a so groß wählen, daß i_p beliebig klein wird.

2. Vergleich zwischen den Summierungen von Cesàro und Riemann.

Satz 1. *Es sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ für ein $\alpha < p-1$ $(C, \alpha+1)$-summierbar und es gelte für sie*

$$|s_1^{(\alpha)}| + |s_2^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}| = O(n), \tag{1}$$

worin $s_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Mittelwerte von der Ordnung α sind. Dann ist diese Reihe auch (R, p)-summierbar mit derselben Summe.

Wir setzen wieder

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

und werden zuerst beweisen, daß für jedes $h > 0$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varphi(nh), \quad u_0 = 0 \tag{2}$$

konvergiert, der wir dabei zugleich noch eine andere Form verleihen werden. Wir bezeichnen nun mit $S_n^{(\alpha)} = A_n^{\alpha} s_n^{(\alpha)}$ die Cesàroschen Summen für die Reihe $\sum u_n$. Für die Teilsummen

$$l_m = \sum_{n=0}^{m} u_n \varphi(nh)$$

erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} l_m &= \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(0)} \Delta \varphi(nh) + S_m^{(0)} \varphi(mh) \\ &= \sum_{n=0}^{m-2} S_n^{(1)} \Delta^2 \varphi(nh) + S_{m-1}^{(1)} \Delta \varphi(\overline{m-1}\, h) + S_m^{(0)} \varphi(mh) \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + S_{m-p+1}^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(\overline{m-p+1}\, h) + \cdots + \\ &\quad + S_{m-1}^{(1)} \Delta \varphi(\overline{m-1}\, h) + S_m^{(0)} \varphi(mh). \end{aligned} \tag{3}$$

Bei festem $q < p$ und $h > 0$ haben wir

$$S_m^{(q)} \Delta^q \varphi(mq) = o(m^p)\, O(m^{-p}) = o(1), \quad m \to \infty;$$

es folgt also, daß

$$l_m = \sum_{n=0}^{m-p} S_n^{(p-1)} \Delta^p \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p} + o(1).$$

Auf Grund des Hilfssatzes 1 können wir annehmen, daß $p - 1 = \alpha + \delta$ ist, $(0 < \delta < 1)$. Wir haben weiter:

$$i_m = \sum_{n=0}^{m} \Delta^p \varphi(nh) \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1} S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh).$$

Also konvergieren die Zahlen

$$g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh)$$

bei $m \to \infty$ und $h > 0$ gegen

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh),$$

welche Reihe infolge der Beziehung

$$A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(nh) = O\left(\frac{1}{n^{p+1-\delta}}\right)$$

absolut konvergent ist. Wir werden beweisen, daß i_m gegen

$$i = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)}$$

strebt. Indem wir die Bezeichnungen

$$t_n = A_{n-\nu}^{\delta-1}, \quad T_n = \sum_{\lambda=\nu}^{n} \Delta^p \varphi(\lambda h) = \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h)$$

einführen, erhalten wir für $g_{m\nu}$ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} g_{m\nu} &= \sum_{n=\nu}^{m} t_n (T_n - T_{n-1}) = \sum_{n=\nu}^{m-1} T_n \Delta t_n + T_m t_m \\ &= -\sum_{n=\nu}^{m} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h)] + \\ &\quad + A_{m-\nu}^{\delta-1} [\Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}h)]. \end{aligned}$$

Strebt dann $m \to \infty$, so ergibt sich:

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h) + \Delta^{p-1}\varphi(\nu h).$$

Gemäß Hilfssatz 3 haben wir für festes $h > 0$

$$|g_\nu| < K \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^p (n+1-\nu)^{2-\delta}} < \frac{K}{\nu^p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{2-\delta}} < \frac{K_1}{\nu^p},$$

da $2 - \delta > 1$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 4 konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}.$$

Folglich wird die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu S_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} O\left(\frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}}\right)$$

absolut konvergent. Wir haben ferner:

$$\begin{aligned} g_\nu - g_{m\nu} &= A_{m+1-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) - A_{m-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\nu h) + A_{m-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{m+1}h) \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} A_{n+1-\nu}^{\delta-2} \Delta^{p-1}\varphi(\overline{n+1}h) = O\left(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right) + \\ &\quad + O\left(m^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right) + \sum_{n=m}^{\infty} O\left(n^{-p}(n+1-\nu)^{\delta-2}\right) \\ &= O\left(\nu^{-p}(m+1-\nu)^{\delta-1}\right). \end{aligned}$$

Für die Differenz:

$$A_m = \sum_{\nu=0}^{m} S_\nu^{(\alpha)} (g_\nu - g_{m\nu})$$

erhalten wir

$$|A_m| < K \sum_{\nu=0}^{m} \nu^{\alpha} |s_\nu^{(\alpha)}| |g_\nu - g_{m\nu}| < K_1 \sum_{\nu=1}^{m} \frac{|s_\nu^{(\alpha)}|}{\nu^{p-\alpha}} \frac{1}{(m+1-\nu)^{1-\delta}},$$

woraus man ersieht, daß

$$\lim_{m \to \infty} A_m = 0.$$

So erhalten wir die Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n.$$

Es sei nun N eine beliebige positive Zahl und m die größte in $\frac{N}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann zunächst

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n^{(\alpha)} g_n = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} = \beta_1 + \beta_2,$$

und nach Hilfssatz 2 weiter:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| = O(m^{\alpha+1-p}), \quad m \to \infty.$$

Gemäß Hilfssatz 4 erhalten wir nun

$$|\beta_2| < M' h^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M'' m^{\delta} N^{-\delta} \sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-p} |S_n^{(\alpha)}| < M''' N^{-\delta}.$$

Wir können N so groß wählen, daß $|\beta_2|$ beliebig klein wird. Durch die Betrachtung der Reihe

$$(u_1 - s) + u_2 + u_3 + \cdots$$

an Stelle der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ können wir uns auf den Fall $s = 0$ beschränken.

Es sei nun λ die größte in $\frac{1}{h}$ enthaltene ganze Zahl. Wir haben dann:

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n' + \sum_{n=0}^{m} S_n^{\alpha} g_n'' = \beta_1' + \beta_1'',$$

$$g_n' = \sum_{\nu=n}^{n+\lambda} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h), \quad g_n'' = \sum_{\nu=n+\lambda+1}^{\infty} A_{\nu-n}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\nu h).$$

Da wir für g_n' auch

$$|g_n'| < K n^{-p} \sum_{\tau=0}^{\lambda} A_\tau^{\delta-1} < K_1 n^{-p} A_\lambda^{\delta} < K_2 n^{-p} h^{-\delta}$$

haben, so werden wir für

$$|\beta_1'| < K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} |s_\nu^{(\alpha)}| \frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} = K_3 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} U_\nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}} \right] + K_3 h^{-\delta} \frac{U_m}{(m+1)^{p-\alpha}}$$

erhalten, worin U_n die Summe

$$U_n = |s_0^{(\alpha)}| + |s_1^{(\alpha)}| + \cdots + |s_n^{(\alpha)}|$$

bedeutet. Infolge $U_n < Mn$, $h = \frac{N}{m}$ ist überdies

$$\begin{aligned} |\beta_1'| &< K_4 h^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{m} \nu \left[\frac{1}{(\nu+1)^{p-\alpha}} - \frac{1}{(\nu+2)^{p-\alpha}}\right] + K_5 \frac{m h^{-\delta}}{(m+1)^{p-\alpha}} \\ &< K_4 h^{-\delta} \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{1}{\nu^{p-\alpha}} + K_5 \frac{m+1}{h^{\delta}(m+1)^{p-\alpha}} < K_6 h^{-\delta}(m+1)^{\alpha+1-p} \\ &< K_7 N^{-\delta}. \end{aligned}$$

Ist $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl, so läßt sich N so groß wählen, daß $|\beta_1'| < \varepsilon$ ist. Für β_1'' erhalten wir:

$$\beta_1'' = \sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' + S_m^{(\alpha+1)} g_m'',$$

$$\Delta g_n'' = \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} A_\tau^{\delta-2} \Delta^p \varphi(\overline{n+\tau}\, h) + A_{\lambda+1}^{\delta-1} \Delta^p \varphi(\overline{n+\lambda+1}\, h),$$

$$|\Delta g_n''| < K' n^{-p} \sum_{\tau=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2-\delta}} < K'' n^{-p} \lambda^{\delta-1} < K''' n^{-p} h^{1-\delta},$$

$$|g_n''| < K^{\mathrm{IV}} h^{-\delta} n^{-p},$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_n^{(\alpha+1)} \Delta g_n'' = \sum_{n=1}^{m-1} h^{1-\delta} o(n^{\alpha+1-p}) = h^{1-\delta} o(m^{\delta-1}) = o(1),$$

$$S_m^{(\alpha+1)} g_m'' = o(m^{\alpha+1}) O\left(\frac{1}{m^p h^{\delta}}\right) = o(1).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ eine für $x > 0$ definierte und bis zur p-ten Ordnung differenzierbare Funktion, welche den folgenden Bedingungen:*

$$\varphi(+0) = 1, \quad \varphi(x) = O(x^{-p}), \quad x \to \infty, \tag{4}$$

$$\varphi^{(p)}(x) = O(x^{-p}), \quad x > 0 \tag{5}$$

genügt. Ist dann die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{6}$$

$|C, p|$-summierbar mit der Summe s, so wird die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) \tag{7}$$

für jedes $x > 0$ konvergieren und ihre Summe gegen s streben, falls $x \to 0$

Bezeichnen wir mit $S_n^{(\varkappa)}$ die Cesàroschen Summen der Ordnung $\varkappa$ der Reihe (6), so erhalten wir:

$$(8)\qquad j_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \varphi(n x) = \sum_{n=0}^{m-p-1} S_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} S_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x)$$

$$= \sum_{n=0}^{m-p-1} s_n^{(p)} A_n^p \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} s_{m-\nu}^{(\nu)} A_{m-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x).$$

Betrachten wir speziell die Reihe

$$1 + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

für welche $s_n^{(p)} = 1$ ist, so werden wir aus (8)

$$(9)\qquad 1 = \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} A_{m-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x)$$

erhalten. Setzen wir nun:

$$S_n^{(\varkappa)} = s A_n^{\varkappa} + T_n^{(\varkappa)}, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

so ergibt sich aus (8) auf Grund von (9):

$$(10)\qquad j_m - s = \sum_{n=0}^{m-p-1} T_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + \sum_{\nu=0}^{p} T_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x).$$

Bei $\varkappa < p$ haben wir auch $S_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$, $T_n^{(\varkappa)} = o(n^p)$ und folglich bei $x > 0$, (x fest), und für $m \to \infty$ auf Grund von (5)

$$T_{m-\nu}^{(\nu)} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{m-\nu}\, x) = o(1).$$

Aus (10) folgt also:

$$j_m = s + \sum_{n=0}^{m-p-1} A_n^p t_n^{(p)} \Delta^{p+1} \varphi(n x) + o(1), \qquad T_n^{(\varkappa)} = A_n^{\varkappa} t_n^{(\varkappa)}.$$

Bezeichnen wir mit $g_n(x)$ den Ausdruck

$$g_n(x) = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^p \Delta^{p+1} \varphi(\mu x),$$

so haben wir nach Formel (9)

$$(11)\qquad g_{n+1-p}(x) = 1 - \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{n+2-\nu}\, x).$$

Auf Grund von (5) und für festes n erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} g_{n+1-p}(x) = 1 - \lim_{x \to 0} \sum_{\nu=0}^{p} A_{n+2-\nu}^{\nu} \Delta^{\nu} \varphi(\overline{n+2-\nu}\, x) = 0.$$

Infolge der Bedingung (5) schließen wir aus dem Hilfssatz 5, daß für jedes $s \leqq p$ die Beziehung

$$(12)\qquad \varphi^{(s)}(x) = O(x^{-s}), \qquad x > 0$$

gültig ist. Auf Grund der Ungleichung:

$$|\Delta^s f(n)| \leqq \max_{n \leqq x \leqq n+s} |f^{(s)}(x)|$$

und aus (12) erhalten wir ferner für jedes x

$$|\Delta^s \varphi(nx)| \leqq M n^{-s},$$

worin M von n und x unabhängig ist. Dann folgt aus (11), daß wir für jedes n und x

$$|g_n(x)| < M'$$

haben, worin M' eine von n und x unabhängige Konstante ist.

Wir haben weiter:

$$j_m = s + \sum_{n=0}^{m-p-1} t_n^{(p)} [g_n(x) - g_{n-1}(x)] + o(1) \tag{13}$$

$$= s + \sum_{n=0}^{m-p-2} g_n(x) \Delta t_n^{(p)} + g_{m-p-1}(x) t_{m-p-1}^{(p)}.$$

Der Bedingung nach ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}|$ konvergent. Setzen wir in (13) $m \to \infty$ ein, so erhalten wir:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) = s + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \Delta t_n^{(p)}. \tag{14}$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige kleine Zahl und λ sei derart gewählt, daß:

$$\sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Wir haben dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) t_n^{(p)} = \sum_{n=0}^{\lambda} + \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} = j' + j'',$$

$$\lim_{x \to 0} j' = 0, \quad |j''| < K \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} |\Delta t_n^{(p)}| < \varepsilon.$$

Folglich auch:

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(nx) = s,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 3. *Wenn eine Reihe $|C, p|$-summierbar ist, so ist sie auch (R, p)-summierbar mit derselben Summe.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, wenn in diesem

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

gesetzt wird, da man auch leicht ersehen kann, daß diese Funktion $\varphi(x)$ den Bedingungen des Satzes 2 Genüge leistet.

Wir setzen jetzt

$$j_p = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p dx$$

und nennen die Folge a_n (R_1, p)-limitierbar mit der Grenze s, wenn die Reihe

$$h \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^p$$

konvergiert und ihre Summe gegen $s j_p$ strebt, falls $h \to 0$. Aus Hilfssatz 6 ersieht man sofort, daß jede konvergente Folge bei $p \geqq 2$ auch (R_1, p)-limitierbar ist mit derselben Grenze. Wir werden jetzt den Satz beweisen.

Satz 4. *Ist die Folge* u_n $(C, \alpha + 1)$*-limitierbar mit der Grenze* s*, wobei* $\alpha < p - 1$ *und*

$$|u_1^{(\alpha)}| + |u_2^{(\alpha)}| + \cdots + |u_n^{(\alpha)}| < Kn$$

(hierin bedeuten $u_n^{(\alpha)}$ *die* Cesàroschen *Mittelwerte der Ordnung* α *für die Folge* u_n*), so ist dieselbe Folge auch* (R_1, p)*-limitierbar mit der Grenze* $s j_p$.

Der Beweisgang verläuft vollkommen analog wie beim Satz 2. Setzen wir $U_n^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} u_\nu$, so werden wir bei $u_n = a_n$ augenscheinlich $U_n^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha-1)}$ haben. Für die Summe

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} u_n \varphi(nh), \qquad \varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$$

erhalten wir bei festem $h > 0$ den Ausdruck

$$T_m = \sum_{n=1}^{m-p-1} U_n^{(p-1)} \Delta^{p-1} \varphi(nh) + o(1) = i_{m-p-1} + o(1).$$

Setzen wir noch $p - 1 = \alpha + \delta$, $0 < \delta < 1$, so erhalten wir:

$$i_m = \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu^{(\alpha)} g_{m\nu}, \quad g_{m\nu} = \sum_{n=\nu}^{m} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh).$$

Die Reihe

$$g_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh)$$

ist also absolut konvergent, und zwar für jedes h, da $A_{n-\nu}^{\delta-1} \Delta^{p-1} \varphi(nh) = O(n^{\delta-p-1})$. Folglich konvergieren $g_{m\nu}$ gegen g_ν, falls $m \to \infty$. Da $\Delta^{p-1} \varphi(nh) = O(n^{-p})$, so ersieht man in ähnlicher Weise, daß i_m gegen $i = \sum_{n=p}^{\infty} U_n^{(\alpha)} g_n$ strebt. Dabei ist die letzte Reihe infolge

$$|g_n| < K n^{-p}$$

konvergent. So erhalten wir die Gleichung:

$$h \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi(nh) = h \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(\alpha)} g_n$$

und es ist

$$|\Delta^{p-1} \varphi(nh)| < M h^{-1} n^{-p}$$

für jedes $h > 0$ und n. Der weitere Beweis verläuft genau wie der des vorangehenden Satzes.

Herrn M. Riess[3]) verdankt man die folgende Verallgemeinerung des Cantorschen Satzes: Ist die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{15}$$

für jedes x $(C, 1)$-summierbar mit der Summe 0 und die Reihe

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2} \tag{16}$$

gleichmäßig konvergent, so verschwinden die Koeffizienten a_n und b_n. Auf Grund unserer Sätze können wir andere neue Ergebnisse in dieser Richtung erhalten. Ist z. B. die Reihe (15) überall $|C, 2|$-summierbar mit der Summe 0 und stellt die Reihe (16) eine stetige Funktion dar, so verschwinden die sämtlichen Koeffizienten a_n und b_n. Ferner sei bemerkt, daß nach bekannten Sätzen[4]) die Reihe (16) für jedes x absolut konvergent ist. Der Beweis beruht auf dem Satz 3 und wird in einer schon bekannten Weise durchgeführt.

Ähnliche Bemerkungen lassen sich auch hinsichtlich des Satzes von H. Lebesgue und P. du Bois-Reymond machen.

---

[3]) M. Riess, Über summierbare trigonometrische Reihen. Math. Annalen **71** (1911), S. 54—75.

[4]) E. Kogbetliantz, Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, Bulletin des Sciences Mathématiques (2), **49** (1925), S. 234—256.

(Eingegangen am 28. März 1942.)

Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen.

Zum achtzigsten Geburtstag von Seb. Finsterwalder.

Von

Robert Sauer in Aachen.

Die „anschauliche Methode" der Differentialgeometrie hat durch den von S. Finsterwalder [1]) der Deutschen Mathematikvereinigung im Jahre 1899 erstatteten Bericht über „*Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation*" einen starken Anstoß erhalten. In dem Bericht wurden einerseits mechanische Eigenschaften von Kurvennetzen mit differentialgeometrischen Eigenschaften der von den Kurvennetzen überdeckten Flächen in Zusammenhang gebracht und zahlreiche sonstige „netzgeometrische" Fragen aufgeworfen. Andrerseits wurden Modelle entwickelt, deren diskretgeometrische Eigenschaften entsprechende differentialgeometrische Beziehungen der Flächentheorie anschaulich darstellen.

Nach beiden Richtungen hin hat der Bericht von S. Finsterwalder weitere Arbeiten seiner Schüler und anderer Geometer unmittelbar oder mittelbar angeregt. In die erste der beiden genannten Kategorien gehören Untersuchungen über geradlinige und geodätische Kurvennetze und über allgemeinere topologische Fragen der Differentialgeometrie. In der zweiten Kategorie sind vor allem Arbeiten zu nennen, welche die Statik der Ausnahmefachwerke mit dem Problem der infinitesimalen Flächenverbiegung verknüpfen, sowie der Aufbau einer Differenzengeometrie, durch welche die Grundgleichungen der Kurven- und Flächentheorie elementargeometrisch verdeutlicht werden.

Einen Beitrag zur zweiten Kategorie soll auch die vorliegende Abhandlung liefern, in der die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen an *Streifenmodellen* und die Differentialgeometrie der Regelflächen an *Stangenmodellen* entwickelt wird. Man erhält hierbei die grundlegenden Sätze über die Verbiegung der drei genannten Flächenklassen samt Aussagen über die geodätischen Linien der Dreh- und Schraubenflächen sowie eine differenzengeometrische Herleitung der Bewegungsinvarianten und der Ableitungs-

[1]) S. Finsterwalder, Jber. d. D. M. V. 6 (1899), S. 45—90.

gleichungen der Liniengeometrie der Regelflächen. Nebenher ergeben sich einfache Modelle der Pseudosphäre sowie der Flächenhäute, die sowohl auf Drehflächen als auch auf Spiralflächen verbogen werden können.

I. Drehflächen und Schraubenflächen.

1. *Drehkegel und Schraubenböschungsfläche.* Als wesentliches Hilfsmittel werden wir den *Drehkegel* und die *Schraubenböschungsfläche* benützen. Wir schicken daher einige einfache Grundtatsachen aus der Geometrie dieser beiden Flächen voraus:

Fig. 1 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung der Vorderhälfte eines Drehkegels. Den Parallelkreisen des Kegels mit dem Radius r

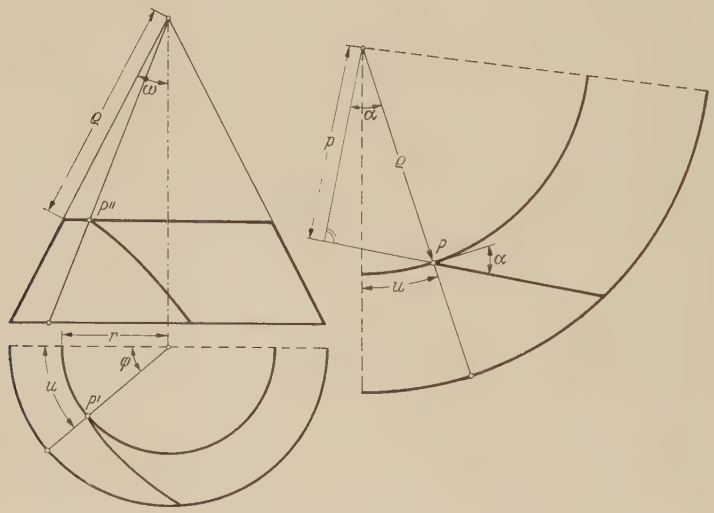

Fig. 1. Drehkegel samt ebener Abwicklung.

entsprechen in der Abwicklung konzentrische Kreise mit dem Radius

$$\varrho = \frac{r}{\sin \omega} \geqq r, \tag{1 a}$$

wobei ω den Winkel der Kegelerzeugenden gegen die Kegelachse bedeutet; $1/\varrho$ ist die geodätische Krümmung der Parallelkreise.

Fig. 2 zeigt Grund- und Aufriß sowie die ebene Abwicklung eines Ausschnittes einer Schraubenböschungsfläche. Sie wird erzeugt von den Tangenten einer Schraubenlinie, die auf einem Drehzylinder vom Radius a mit dem Neigungswinkel ω gegen die Zylinderachse verläuft und *Kehllinie* heißen soll. Die dem Drehwinkel 1 zugeordnete Parallelverschiebung

$$h = a \operatorname{cotg} \omega \tag{2}$$

bei der die Böschungsfläche erzeugenden Schraubenbewegung bezeichnen wir als *Vorschub*. Die zur Kehllinie koaxialen Zylinder schneiden aus der Böschungsfläche Schraubenlinien vom Radius r aus, welche alle denselben Vorschub h wie die Kehllinie haben. In der Abwicklung gehen die Schraubenlinien in konzentrische Kreise mit dem Radius ϱ über, wobei wieder $1/\varrho$ die

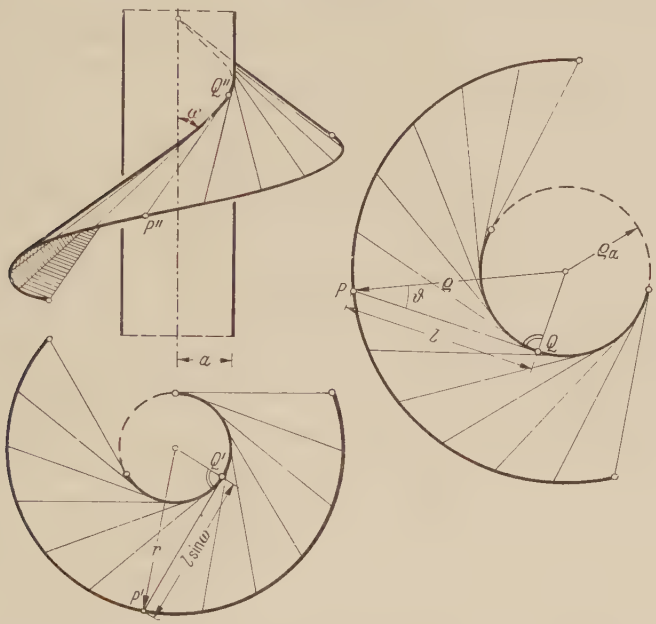

Fig. 2. Schraubenböschungsfläche samt ebener Abwicklung.

geodätische Krümmung der entsprechenden Schraubenlinien darstellt. Insbesondere liefert die Kehllinie in der Abwicklung einen Kreis vom Radius

$$\varrho_a = \frac{a^2 + h^2}{a} = \frac{2h}{\sin 2\omega}; \tag{3}$$

die Tangenten dieses Kreises stellen die Abwicklung der Erzeugenden der Schraubenböschungsfläche dar und schneiden die Radien der konzentrischen Kreise unter dem von ϱ abhängigen Winkel

$$\vartheta = \arcsin \varrho_a/\varrho = \arcsin \frac{2h}{\varrho \sin 2\omega}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$r^2 = a^2 + l^2 \sin^2\omega, \quad \varrho^2 = \varrho_a^2 + l^2 = \frac{4h^2}{\sin^2 2\omega} + l^2,$$

wobei l die auf den Erzeugenden gemessene Länge bedeutet, ergibt sich mittels (2) nach kurzer Rechnung

$$\varrho = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sin\omega} \geqq \sqrt{r^2 + h^2}. \tag{1 b}$$

Die geodätischen Linien des Kegels und der Schraubenböschungsfläche liefern in der ebenen Abwicklung gerade Linien. Daraus folgt nach Fig. 1 in beiden Fällen

$$\varrho \cos \alpha = p,$$

woraus man mit Berücksichtigung von (1a) bzw. (1b) für den Kegel

$$r \cos \alpha = p \sin \omega \tag{4a}$$

und für die Schraubenböschungsfläche

$$\sqrt{r^2 + h^2} \cos \alpha = p \sin \omega \tag{4b}$$

erhält. α ist der Neigungswinkel der geodätischen Linie gegen die Parallelkreise bzw. die Schraubenlinien.

2. *Streifenmodell der Dreh- und Schraubenflächen.* Wir betrachten nunmehr eine beliebige Dreh- oder Schraubenfläche und greifen auf ihr einzelne Parallelkreise bzw. Schraubenlinien heraus. Indem wir dann die Flächenzonen zwischen aufeinanderfolgenden Parallelkreisen bzw. Schraubenlinien durch abwickelbare Streifen ersetzen, erhalten wir ein *Streifenmodell* der Dreh- bzw. Schraubenfläche. Die Streifen sind bei Drehflächen Ausschnitte von Drehkegeln, bei Schraubenflächen Ausschnitte von Schraubenböschungsflächen; die Kegel und die Böschungsflächen können zu Drehzylindern entarten.

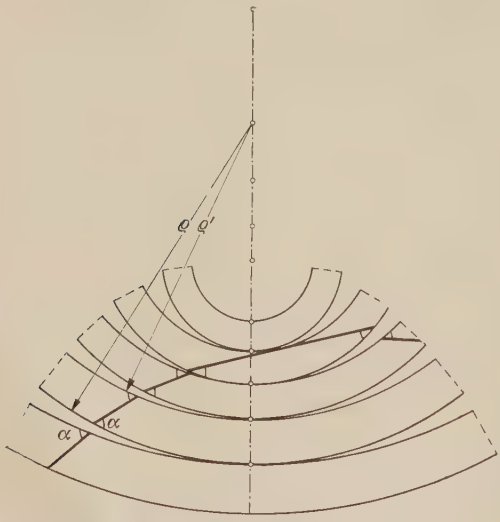

Fig. 3. Streifenmodell einer Dreh- oder Schraubenfläche.

Fig. 3 zeigt die ebene Abwicklung eines Streifenmodells. Sie besteht aus Sektoren von Kreisringen, die bei „negativ gekrümmten" konkaven Modellen sich überlappen und bei „positiv gekrümmten" konvexen Modellen klaffen.

Wenn man die Streifenbreite gegen Null gehen läßt, konvergieren die Modelle gegen die gegebene Dreh- bzw. Schraubenfläche. Durch diesen Grenzprozeß kann man Eigenschaften der Streifenmodelle in die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen übersetzen. Wir werden im folgenden mit diesem Verfahren die Verbiegung der Dreh- und Schraubenflächen und den Verlauf der geodätischen Linien untersuchen.

3. *Verbiegung von Dreh- und Schraubenflächen.* Nach Fig. 3 besteht die Abwicklung eines Streifenmodells aus Kreisringsektoren. Wir betrachten daher zunächst die Verbiegungsmöglichkeiten eines einzelnen Kreisringsektors mit den Radien ϱ, ϱ':

a) Nach (1a) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius ϱ zur Deckung kommt mit einem Bogenstück eines beliebig vorgegebenen Kreises vom Radius $r \leqq \varrho$. Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone eines Kegels, dessen Öffnungswinkel 2ω durch $\sin\omega = r/\varrho$ bestimmt ist. Je nach der Wahl von r wird die Kegelzone genau einfach oder nur teilweise oder mehrfach überdeckt. Bei Änderung von r ändert sich r' proportional mit r und der Azimutwinkel φ (vgl. Fig. 1) wegen $r\varphi = u = \text{const}$ umgekehrt proportional mit r.

b) Nach (1b) kann der Kreisringsektor so verbogen werden, daß der Kreisrand vom Radius ϱ zur Deckung kommt mit einem Bogenstück einer beliebig vorgegebenen Schraubenlinie vom Vorschub h und vom Radius $r \leqq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$. Dabei geht der Kreisringsektor über in die Zone einer Schraubenböschungsfläche; der Winkel ω der Erzeugenden gegen die Schraubenachse ist durch $\sin\omega = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\varrho}$ und der Radius der Kehllinie hierauf durch (3) festgelegt.

Wendet man diese Ergebnisse nacheinander auf die verschiedenen Streifen eines Streifenmodells an, so erhält man den Verbiegungssatz:

Ein Streifenmodell kann in eine 1-parametrige Menge von Drehmodellen und eine 2-parametrige Menge von Schraubenmodellen verbogen werden; bei Drehmodellen läßt sich ein Kreisradius $r \leqq \varrho$, bei Schraubenmodellen der Vorschub h sowie ein Kreisradius $r \leqq \sqrt{\varrho^2 - h^2}$ willkürlich vergeben. Bei je 2 aufeinander verbiegbaren Drehmodellen stehen einander entsprechende Radien in einem konstanten Verhältnis λ und einander entsprechende Azimutwinkel im umgekehrten Verhältnis $1/\lambda$.

Durch den in Ziffer 2 erwähnten Grenzprozeß geht der Verbiegungssatz der Streifenmodelle in den gleichlautenden Verbiegungssatz der Dreh- und Schraubenflächen über, der in der Differentialgeometrie als *Bourssches Theorem*[2]) bekannt ist. Außerdem läßt sich die Verbiegung der Streifenmodelle in einfachster Weise darstellend-geometrisch verwirklichen, indem man in Grund- und Aufriß die von den Erzeugenden der einzelnen Streifen gebildeten Streckenzüge konstruiert. Man erhält hierdurch mit beliebiger Genauigkeit die Meridiane der Biegungsdrehflächen und die zu den Schraubenlinien konjugierten Kurven der Biegungsschraubenflächen.

[2]) Vgl. z. B. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale I 1, 1927 (Bologna), S. 343ff.

4. *Beispiele*: *Spiraldrehflächen und Pseudosphäre.* Als Beispiel betrachten wir Streifenmodelle, bei denen je zwei benachbarte Streifen der Abwicklung in einem konstanten Verhältnis μ zueinander ähnlich sind. Bei Ähnlichkeitstransformationen mit den Verhältnissen μ, μ^{-1}, μ^2, μ^{-2} usw. wird dann die Abwicklung als Ganzes, abgesehen vom ersten und letzten Streifen, in sich transformiert. Man kann diesen Tatbestand auch folgendermaßen ausdrücken: Wenn man ein Streifenmodell der hier betrachteten Art im Verhältnis μ, μ^2, μ^3 usw. ähnlich vergrößert oder verkleinert, so haben das ursprüngliche und das transformierte Modell dieselbe Abwicklung, sind also aufeinander verbiegbar. Beim Grenzübergang ergeben sich Flächen, die sich auf die 1-parametrigen Mengen der zu ihnen ähnlichen Flächen verbiegen lassen. Wie S. Lie [3]) gezeigt hat, sind Flächen dieser Art *Spiralflächen* oder Biegungsflächen von Spiralflächen. Da die vorliegenden Flächen demnach sowohl auf Dreh- und Schraubenflächen als auch auf Spiralflächen verbogen werden können, nennen wir sie kurz *Spiraldrehflächen.*

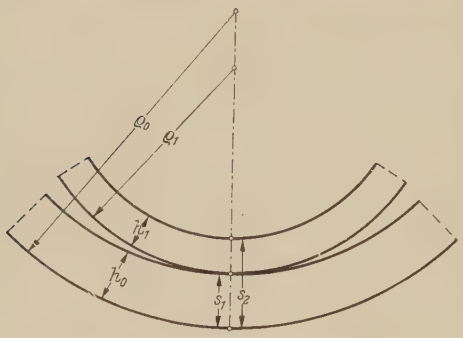

Fig. 4.
Streifenpaar für eine Spiraldrehfläche.

Wir bezeichnen mit ϱ_0, $\varrho_1 = \varrho_0 \mu$, $\varrho_2 = \varrho_0 \mu^2$ usw. die äußeren Kreisradien und mit h_0, $h_1 = h_0 \mu$, $h_2 = h_0 \mu^2$ usw. die Breiten der einzelnen Streifen; vgl. Fig. 4. Dann erhält man für die zu den Kreisen senkrechten Meridianpolygone die Bogenlängen

$$s_1 = h_0, \quad s_2 = h_0 + h_1, \ldots, \quad s_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_{n-1},$$
$$= h_0 (1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1}).$$

woraus nach kurzer Rechnung

$$\varrho_n = \varrho_0 + a s_n, \quad a = \varrho_0 \frac{\mu - 1}{h_0} \tag{5}$$

und nach dem Grenzübergang vom Modell zu Fläche

$$\boxed{\varrho = \varrho_0 + a s} \tag{6}$$

folgt.

Für $a = -1$ wird $\varrho_0 - \varrho_1 = h_0$, d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung schließen sich lückenlos aneinander, die Spiraldrehfläche spezialisiert

[3]) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, S. 162.

sich zum Drehkegel. Für $a > -1$ ergeben sich negativ gekrümmte und für $a < -1$ positiv gekrümmte Drehspiralflächen. Im Sonderfall $a = 0$ wird $\mu = 1$, d. h. die Streifen der ebenen Abwicklung sind kongruent. An Stelle der Ähnlichkeitstransformationen treten in diesem Falle Kongruenztransformationen und die Spiraldrehflächen entarten in Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes, wobei die aus (6) folgende Beziehung $\varrho = \varrho_0 \cdot \text{const}$ die bekannte Traktrixeigenschaft der *Pseudosphäre* liefert.

In Fig. 5 ist ein Drehflächenmeridian für ein Streifenmodell einer negativ gekrümmten Spiraldrehfläche ($\varrho_0/h = 4$, $a = -0{,}08$) nach Gleichung (5) konstruiert.

Aus (6) folgt mit

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{r}{\varrho} \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$$

bei der Anfangsbedingung $r_0 = \varrho_0$ für $s = 0$ im Falle $a = 0$ als Meridiangleichung der Pseudosphäre

$$z = \int_{\varrho_0}^{r} \sqrt{\varrho_0^2 - r^2}\, \frac{dr}{r}$$

und im Falle $a \neq 0$ als Meridiangleichung der Spiraldrehflächen [4])

$$z = \frac{1}{a} \int_{\varrho_0}^{r} \sqrt{(r/\varrho_0)^{-2(a+1)} - 1}\, dr.$$

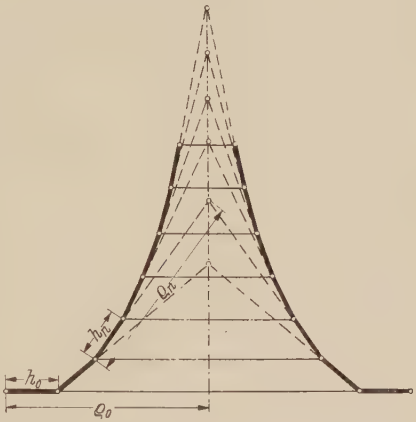

Fig. 5.
Konstruktion einer Spiraldrehfläche.

5. *Geodätische Linien auf Dreh- und Schraubenflächen.* Die geodätischen Linien eines Streifenmodells setzen sich in der ebenen Abwicklung aus geraden Strecken zusammen. Beim Übergang von einem Streifen zum nächsten sind die Scheitelwinkel α einander gleich (vgl. Fig. 3), so daß die Konstanten auf der rechten Seite der Gleichungen (4a) bzw. (4b) für alle Streifen denselben Wert haben. Man erhält daher für die geodätischen Linien auf Drehflächen die bekannte *Clairautsche Gleichung*

(7a) $$\boxed{r \cos \alpha = \text{const}}$$

und für die geodätischen Linien auf Schraubenflächen die allgemeinere Beziehung

(7b) $$\boxed{\sqrt{r^2 + h^2}\, \cos \alpha = \text{const}.}$$

[4]) Vgl. hierzu L. Raffy, Par. soc. math. **20** (1892), S. 22.

II. Regelflächen.

1. *Stangenmodell der Regelflächen.* Auf einer beliebig vorgegebenen Regelfläche greifen wir einzelne Erzeugende heraus und verbinden je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende durch die auf ihnen senkrecht stehenden kürzesten Abstände; wenn die aufeinanderfolgenden Erzeugenden parallel sind, wählen wir irgendein gemeinsames Lot als kürzesten Abstand. Das so erzeugte Geradengebilde bezeichnen wir als *Stangenmodell.*

In Fig. 6 ist ein Stangenmodell dargestellt. Die Erzeugenden sind mit $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ usw., die Geraden der kürzesten Abstände mit $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$ bezeichnet. φ_{12} bzw. ω_2 bedeutet den Winkel der Erzeugenden $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ bzw. der kürzesten Abstände $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$, ferner h_{12} die Länge des kürzesten Abstandes zwischen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ und v_2 die Entfernung der Fußpunkte F_{21}, F_{23} der kürzesten Abstände auf $\mathfrak{g}_2$.

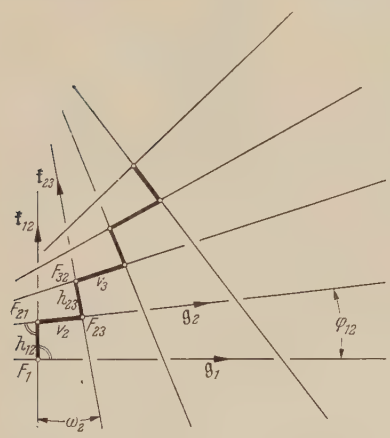

Fig. 6.
Stangenmodell einer Regelfläche.

Die Beziehung zwischen den Geradenfolgen $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ ist eine gegenseitige, d. h. man kann die Linien $\mathfrak{k}_{i,i+1}$ als Erzeugende nehmen und bekommt dann als kürzeste Abstände die Strecken v_i auf den Geraden $\mathfrak{g}_i$.

Wenn man die das Stangenmodell aufbauenden Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ auf der vorgegebenen Regelfläche enger und enger nimmt, konvergieren die Modelle gegen die Regelfläche und man erhält durch diesen Grenzprozeß die Differentialgeometrie der Regelflächen aus elementargeometrischen Beziehungen der Stangenmodelle. Die Streckenzüge mit den Fußpunkten F_{ik} der kürzesten Abstände als Eckpunkten gehen an der Grenze in die *Kehllinie* der Regelfläche über, die Geradenfolge $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$ usw. konvergiert gegen die *konjugierte Regelfläche*, welche die gegebene Regelfläche längs der gemeinsamen Kehllinie berührt.

2. *Bewegungsinvarianten der Regelflächen.* Ein Stangenmodell ist bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festgelegt, wenn die Winkel $\varphi_{i,i+1}$ und ω_i sowie die Längen $h_{i,i+1}$ und v_i vorgegeben sind. Dabei muß man geeignete Festsetzungen über die Vorzeichen treffen, worauf wir in Ziffer 3 zurückkommen werden.

Beim Übergang vom Stangenmodell zur Regelfläche, deren Erzeugende durch hinreichend oft differenzierbare Funktionen eines Parameters t gegeben seien, erhält man die Grenzwerte

$$\frac{\varphi_{i,i+1}}{\Delta t} \to p(t), \quad \frac{\omega_i}{\Delta t} \to q(t), \quad \frac{h_{i,i+1}}{\Delta t} \to r(t), \quad \frac{v_i}{\Delta t} \to \bar{q}(t).$$

Aus der Herleitung folgt, daß die vier Funktionen $p(t)$, $q(t)$, $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$ Differentialinvarianten sind, welche die Regelfläche bis auf eine beliebige Bewegung im Raum festlegen. Sie hängen noch von dem willkürlichen Parameter t ab, während ihre Verhältnisse von t unabhängig sind. Ebenso hängen die Integralinvarianten

$$P = \int_{t_a}^{t_b} p\,dt = \lim \Sigma\, \varphi_{i,\,i+1}, \quad Q = \int_{t_a}^{t_b} q\,dt = \lim \Sigma\, \omega_i,$$

$$\bar{P} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{p}\,dt = \lim \Sigma\, h_{i,\,i+1}, \quad \bar{Q} = \int_{t_a}^{t_b} \bar{q}\,dt = \lim \Sigma\, v_i$$

nicht mehr von t ab. P und Q sind Bogenlängen im sphärischen Bild der Ausgangsregelfläche und der konjugierten Regelfläche; über die geometrische Bedeutung von P und $\bar{Q}$ vgl. Ziffer 4.

Das Verhältnis $\bar{p}/p$ nennt man vielfach *Drall*; außerdem wollen wir im Hinblick auf die in Ziffer 4 erläuterten kinematischen Zusammenhänge q/p als *Biegung* und $\bar{q}/p$ als *Schrotung* bezeichnen.

3. *Ableitungsgleichungen der Regelflächen.* Wir verstehen nunmehr unter $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{k}_{12}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Erzeugenden und der kürzesten Abstände des Stangenmodells, und zwar soll $\mathfrak{k}_{12}$ von F_1 nach F_{21} gerichtet sein. Außerdem sei $\mathfrak{n}_{12}$ der zu $\mathfrak{k}_{12}$ und der Winkelhalbierenden von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ senkrechte Einheitsvektor, derart, daß $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{n}_{12}, \mathfrak{k}_{12}$ ein Rechtssystem bilden. Schließlich bedeutet $\hat{\mathfrak{n}}_2$ den zu $\mathfrak{g}_2$ und der Winkelhalbierenden von $\mathfrak{k}_{12}, \mathfrak{k}_{23}$ senkrechten Einheitsvektor, wobei $\mathfrak{g}_2, \hat{\mathfrak{n}}_2, \mathfrak{k}_{12}$ wieder rechtsorientiert sind. Dann gelten offenbar die Beziehungen

$$(8) \qquad \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_{12} \cdot 2 \sin \frac{\varphi_{12}}{2}, \quad \mathfrak{k}_{23} - \mathfrak{k}_{12} = -\hat{\mathfrak{n}}_2 \cdot 2 \sin \frac{\omega_2}{2},$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von φ_{12} und ω_2 definieren.

Beim Grenzübergang vom Stangenmodell zur Regelfläche konvergiert sowohl $\mathfrak{n}_{12}$ als auch $\hat{\mathfrak{n}}_2$ gegen den Normalenvektor $\mathfrak{n}$ der Regelfläche und aus (8) folgen die Ableitungsgleichungen

$$(9) \qquad \boxed{\mathfrak{g}' = p\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{k}' = -q\,\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}' = -p\,\mathfrak{g} + q\,\mathfrak{k}.}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sich aus den beiden ersten mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{g}$.

Zur Festlegung der Geraden benötigt man neben den die Richtung bestimmenden Einheitsvektoren $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{k}$ noch die Momentvektoren

$$(10) \qquad \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{g})} \times \mathfrak{g}, \quad \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{n})} \times \mathfrak{n}, \quad \bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{r}_{(\mathfrak{k})} \times \mathfrak{k}$$

mit dem Radiusvektor r von einem beliebig angenommenen Bezugspunkt 0 nach einem beliebigen Punkt der betreffenden Geraden. Für die Differentiation nach t liefern die an den Stangenmodellen ablesbaren Beziehungen

$$\Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{g})} = h_{12}\mathfrak{k}_{12}, \quad \Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{n})} = h_{12}\mathfrak{k}_{12} + v_2\mathfrak{g}_2, \quad \Delta \mathfrak{r}_{(\mathfrak{k})} = v_2\mathfrak{g}_2,$$

welche gleichzeitig die Vorzeichen von h_{12} und v_2 definieren, beim Grenzübergang zur Regelfläche die Formeln

$$\mathfrak{r}'_{(\mathfrak{g})} = \bar{p}\,\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{r}'_{(\mathfrak{n})} = \bar{p}\,\mathfrak{k} + \bar{q}\,\mathfrak{g}, \quad \mathfrak{r}'_{(\mathfrak{k})} = \bar{q}\,\mathfrak{g}. \tag{11}$$

Durch Differentiation von (10) kommt schließlich mit Berücksichtigung von (9) und (11) das Gleichungssystem

$$\boxed{\bar{\mathfrak{g}}' = \bar{p}\,\mathfrak{n} + p\,\bar{\mathfrak{n}}, \quad \bar{\mathfrak{k}}' = -\bar{q}\,\mathfrak{n} - q\,\bar{\mathfrak{n}}, \quad \mathfrak{n}' = -\bar{p}\,\mathfrak{g} - p\,\bar{\mathfrak{g}} + \bar{q}\,\mathfrak{k} + q\,\bar{\mathfrak{k}}.} \tag{12}$$

Die Differentialgleichungen (9) und (12) sind die bekannten *Ableitungsgleichungen*[5]) der Liniengeometrie der Regelflächen.

4. *Verbiegung und Verschrotung der Regelflächen.* Wir denken uns die kürzesten Abstände der Stangenmodelle nach Fig. 7 als Blechhülsen ausgebildet, welche um die Stangen $\mathfrak{g}_i$ verdrehbar und längs $\mathfrak{g}_i$ verschiebbar sind, während Winkel und Abstand aufeinanderfolgender Stangen ungeändert bleibt. Das Stangenmodell läßt sich dann durch Verdrehung und Verschiebung der Hülsen unter Festhaltung der Winkel $\varphi_{i,\,i+1}$ und der Längen $h_{i,\,i+1}$ deformieren. Bei reiner Verdrehung der Hülsen sprechen wir von *Verbiegungen*, im allgemeinen Fall, d. h. wenn Verschiebungen hinzukommen, von *Verschrotungen* des Modells. Bei Verbiegungen bleiben die Strecken v_i fest, während sich die Winkel ω_i ändern, bei allgemeinen Verschrotungen ändern sich sowohl die Strecken v_i als auch die Winkel ω_i.

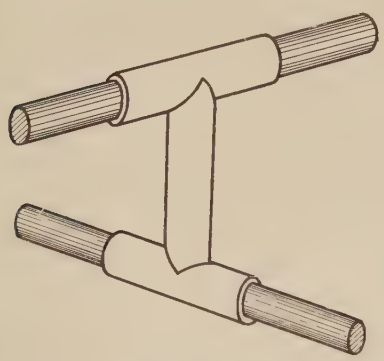

Fig. 7. Blechhülse zur Verkopplung eines Stangenpaars.

Je zwei aufeinanderfolgende, durch den kürzesten Abstand verbundene Stangen bezeichnen wir als *Stangenpaar* des Modells. Die Stangenpaare bleiben sowohl bei Verbiegungen wie bei Verschrotungen im Winkel und im kürzesten Abstand bis auf ein unwesentliches Gleiten der Stangen in den Hülsen ungeändert. Die sich paarweise entsprechenden Stangenpaare

[5]) Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie I, Berlin 1930, S. 270; außerdem F. Löbell, Jber. d. D. M. V. **51** (1941), Heft 2, S. 29—41.

zweier in der Verbiegungsbeziehung stehenden Modelle I, II kommen der Reihe nach miteinander zur Deckung durch Drehungen um die Geraden $\mathfrak{g}_i$ mit den Winkeln $\omega_i^{II} - \omega_i^I$. Bei zwei in allgemeiner Verschrotungsbeziehung stehenden Modellen treten an Stelle der Drehungen um die Geraden $\mathfrak{g}_i$ Schraubungen, indem zu den Drehungen $\omega_i^{II} - \omega_i^I$ noch die Verschiebungen $v_i^{II} - v_i^I$ hinzukommen.

Beim Grenzübergang vom Modell zur Fläche liefert der Verbiegungsprozeß die Biegungsflächen und der Verschrotungsprozeß die Schrotungs-

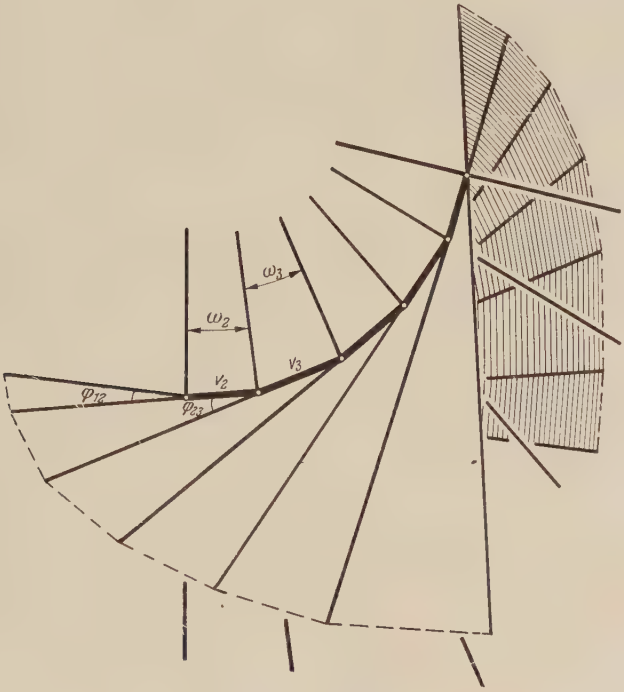

Fig. 8. Torsenmodell.

flächen der vorgegebenen Regelfläche. Die Schrotungsflächen stimmen in den Invarianten $p(t)$ und $\bar{p}(t)$ und demnach im Drall $\dot{p}/p$, die Biegungsflächen außerdem noch in der Invarianten $q(t)$ und somit in der Schrotung $\dot{q}/p$ überein, während sie sich in der Biegnng q/p unterscheiden. Biegungsregelflächen lassen sich aneinander abrollen. Dabei berühren sie sich in jedem Augenblick längs einer gemeinsamen Erzeugenden $\mathfrak{g}(t)$ und führen um diese eine Momentandrehung aus; die momentane Drehgeschwindigkeit ist gleich $q^{II}(t) - q^I(t)$, falls der Parameter t die Zeit bedeutet. Bei Schrotungsregelflächen tritt an Stelle des Abrollens ein „Abschroten"; die gemeinsamen Erzeugenden $\mathfrak{g}(t)$ sind die Achsen von Momentanschraubungen mit der Drehgeschwindigkeit $q^{II}(t) - q^I(t)$ und der Verschiebungsgeschwindigkeit $\dot{q}^{II}(t) - \dot{q}^I(t)$.

Ein Stangenmodell läßt sich stets so verbiegen, daß die Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ einer Ebene parallel werden; die kürzesten Abstände $\mathfrak{k}_{i,\,i+1}$ stehen dann auf dieser Ebene senkrecht und bilden die Winkel $\omega_i = 0$. Dem entsprechend kann eine Regelfläche stets in ein *Konoid* verbogen werden, indem man der Invarianten $q(t)$ den Wert Null gibt. Die Integralinvarianten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ (vgl. Ziffer 2) zwischen zwei Geraden $\mathfrak{g}_a$ und $\mathfrak{g}_b$ können dann als kürzester Abstand dieser Geraden und als Bogenlänge des Konoidumrisses gedeutet werden.

5. *Sonderfall*: *Torse und Binormalenfläche.* Mit $h_{i,\,i+1} = 0$ entartet das Stangenmodell zu dem in Bild 8 dargestellten *Torsenmodell*, bei dem je zwei aufeinanderfolgende Erzeugende $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_{i+1}$ durch ebene Dreieckstreifen verbunden werden können. Die Erzeugenden $\mathfrak{g}_i$ bilden ein Polygon mit den Seitenlängen v_i und den Außenwinkeln $\varphi_{i,\,i+1}$, die Geraden $\mathfrak{k}_{i,\,i+1}$ stehen in den Polygonecken auf den Dreieckstreifen senkrecht und schließen die Winkel ω_i ein.

Differentialgeometrisch entspricht dem Torsenmodell die Tangentenfläche einer Raumkurve samt der von den Binormalen erzeugten Regelfläche. Die Krümmung und Windung der Raumkurve ist durch

$$K = \lim \frac{\varphi_{12}}{v_2} = \frac{p}{q}, \quad W = \lim \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{q}{q}$$

gegeben. Hierdurch gehen die Ableitungsgleichungen (9) in die *Frenetschen Formeln* der Kurventheorie über.

(Eingegangen am 14. April 1942.)

Einige Bemerkungen über rationale Flächen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Der behandelte Problemkreis.

Unter einem rationalen Gebilde im projektiven R_n ($n \geqq 2$) verstehen wir eine Menge von Punkten, deren $n+1$ homogene Koordinaten sich rational durch eine Anzahl Parameter darstellen lassen:

$$\lambda x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

λ ist ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor, den wir später weglassen. Die f_ν sind rationale Funktionen, die wir, indem wir den Hauptnenner in den Faktor λ aufnehmen, als *Polynome* annehmen dürfen, ja sogar als homogene Polynome gleichen Grades, indem wir die Parameter homogenisieren, d. h. $\varrho_\varkappa$ durch $\varrho_\varkappa \varrho_{k+1}^{-1}$ ersetzen und eine geeignete Potenz von ϱ_{k+1} in den Faktor λ aufnehmen. Außerdem dürfen wir die Polynome f_ν als relativ prim annehmen, weil ein gemeinsamer Teiler durch Änderung des Faktors λ beseitigt werden kann. Die Koeffizienten der f_ν mögen einem Körper der Charakteristik 0 angehören, etwa dem Körper der komplexen Zahlen oder einem durch Adjunktion von Unbestimmten daraus hervorgegangenen Erweiterungskörper und die Parameter dürfen dann alle Wertsysteme dieses Körpers durchlaufen für welche die f_ν nicht sämtlich verschwinden.

Ist die Anzahl der homogenen Parameter gleich n und ist das Gebilde $(n-1)$-dimensional, so nennen wir es rationale *Fläche* (im projektiven R_n; *Kurve* für $n = 2$). Für eine rationale Fläche gilt also die Darstellung

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

wo die f_ν homogene Polynome gleichen positiven Grades ohne gemeinsamen nichtkonstanten Teiler sind. Die Gleichungen (1) vermitteln eine (meist nicht eineindeutige) Abbildung der Fläche auf die $(n-1)$-dimensionale Ebene, deren Punkte die homogenen Koordinaten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ haben. Man kennt allerhand Möglichkeiten, um bei einer algebraischen Fläche herauszubekommen, ob sie rational ist, und gegebenenfalls eine Abbildung auf die Ebene zu finden [1]). Aber um die umgekehrte Frage scheint man sich nie recht gekümmert zu

[1]) Darüber belehrt z. B. das Buch von F. Conforto, Le superficie razionali. Bologna 1939.

haben, wohl, weil man sie für trivial hielt; und doch sind da manche Fragen zu klären.

Daß es sowohl auf der Ebene wie auf der Fläche im allgemeinen Ausnahmepunkte gibt, denen bei der Abbildung kein Bildpunkt entspricht, ist zwar längst bekannt und wird auch bei Conforto a. a. O. mehrfach hervorgehoben. Aber wie bekommt man überhaupt die Flächengleichung? Die Antwort heißt natürlich, daß man ja nur die Parameter zu *eliminieren* braucht; aber da beginnt die Schwierigkeit. Zunächst kann es sein, daß die Gleichungen (1) überhaupt keine Fläche, sondern ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen darstellen. Da möchte man doch brauchbare Kriterien haben. Und wenn sie eine Fläche darstellen, welches ist ihre Ordnung? Man wird sich die Antwort so überlegen: Eine allgemeine Gerade, dargestellt durch $n-1$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1),$$

hat mit der Fläche, wenn die f_ν vom Grad m sind, nach dem Bézoutschen Satz m^{n-1} Punkte gemein, also ist die Fläche von der Ordnung m^{n-1}. Aber dann wäre die Ordnung einer rationalen Fläche im R_n stets eine $(n-1)$-te Potenz, was nicht zutrifft. Bei den Flächen zweiter Ordnung im R_3 ist z. B. bei den üblichen Darstellungen in der Gestalt (1) stets $m=2$, woraus man die Ordnung $2^2 = 4$ errechnet statt 2; die Rechnung stimmt also nicht. Andererseits ist bekannt, daß beim Eliminieren die „Endgleichung" leicht mit „falschen" Faktoren behaftet ist; um solchen zu entgehen, wird man etwa die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1 & , \ldots, & \varrho_n & , \quad 1 \end{pmatrix}$$

oder auch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} x_0 f_1 - x_1 f_0, & \ldots, & x_0 f_n - x_n f_0 \\ \varrho_1 & , \ldots, & \varrho_n \end{pmatrix}$$

gleich 0 setzen. Aber erstens ist dieser Resultantenbegriff für $n > 1$ bzw. für $n > 2$ nur wenig bekannt, zweitens wird der Kenner leicht finden, daß die erste Resultante in den x_ν homogen vom Grad m^n und die zweite homogen vom Grad $n \cdot m^{n-1}$ ist, während man nur die Ordnung m^{n-1} erwartet. Die Rechnung stimmt also wieder nicht. Sind in den Resultanten vielleicht auch noch „falsche" Faktoren enthalten? Zu allem Unglück kommt es aber auch häufig vor, daß beide Resultanten identisch verschwinden (vgl. die Sätze des § 3), also überhaupt keine Flächengleichung liefern. Was dann?

Man sieht, es sind noch allerhand Fragen zu klären, und ein Beitrag dazu soll im folgenden mit streng algebraischen Methoden geliefert werden. Die dabei benötigten Sätze findet man in des Verfassers Buch: Algebra, Bd. 1, zweite Aufl. 1932, das unter „Algebra" zitiert wird.

§ 2.

Die Funktionalmatrix.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Gleichungen* (1), *wo die f_ν homogene Polynome gleichen Grades sind* [2]), *eine und nur eine absolut irreduzible homogene algebraische Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen, ist, daß die n-reihigen Determinanten der Funktionalmatrix*

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial \varrho_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \varrho_n} \end{matrix} \right\|$$

nicht sämtlich identisch verschwinden. Ist sie erfüllt, so ist also das rationale Gebilde (1) *ein (echter oder unechter) Teil der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, aber nicht zugleich Teil eines algebraischen Gebildes von weniger als $n - 1$ Dimensionen.*

Beweis. Ganz unabhängig von der Funktionalmatrix haben die Gleichungen (1) nach Algebra, Satz 56 eine Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge. Es ist also $G(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch 0, und da die f_ν homogen von gleichem Grad sind, muß dann schon jeder in bezug auf die f_ν homogene Bestandteil von $G(f_0, \ldots, f_n)$ für sich verschwinden. Die Gleichungen (1) haben also auch eine *homogene* Gleichung $G(x_0, \ldots, x_n) = 0$ zur Folge [3]). Zerlegt man G in absolut irreduzible Faktoren [4])

$$G(x_0, \ldots, x_n) = F_1(x_0, \ldots, x_n) \ldots F_r(x_0, \ldots, x_n),$$

die dann von selbst ebenfalls homogen sind, so ist das Produkt

$$F_1(f_0, \ldots, f_n) \ldots F_r(f_0, \ldots, f_n)$$

als Polynom der ϱ_ν identisch 0; also ist schon ein Faktor identisch 0, etwa der erste. Das besagt aber, daß die Gleichungen (1) die irreduzible Gleichung $F_1(x_0, \ldots, x_n) = 0$ nach sich ziehen. Würden sie noch eine zweite nach sich ziehen, so könnte man aus beiden Gleichungen eine beliebige der Größen x_ν eliminieren, d. h. die gewöhnliche (Sylvestersche) Resultante gleich 0 setzen

---

[2]) Daß die f_ν relativ prim sind, braucht bei diesem Satz nicht vorausgesetzt zu werden.

[3]) Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich in meiner Arbeit: Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Annalen **118** (1942), S. 441—448.

[4]) Dazu ist es vielleicht nötig, den zugrunde gelegten Körper durch Adjunktion neuer Größen zu erweitern. Solche Adjunktionen denken wir uns hier und auch später, sobald sie nötig werden, stets stillschweigend vollzogen. Dagegen ist es nicht nötig, einen algebraisch abgeschlossenen Körper vorauszusetzen.

und würde so eine Relation zwischen den anderen x_μ erhalten [5]). Nach Algebra, Satz 61 müßten dann aber die Determinanten der Funktionalmatrix verschwinden, entgegen der Voraussetzung.

Bemerkung. Satz 1 sagt nur, daß das rationale Gebilde ein *Teil* der Fläche $F = 0$ ist. Es wäre falsch zu sagen, daß es die ganze Fläche ist; denn es kann Ausnahmepunkte auf der Fläche geben, die durch die Darstellung (1) nicht erfaßt werden.

Beispiele.
$$\begin{aligned}
&\text{I.} && x_0 = \varrho_1^2, && x_1 = \varrho_1\varrho_2, && x_2 = \varrho_2^2, && x_3 = \varrho_3^2,\\
&\text{II.} && x_0 = \varrho_1^3, && x_1 = \varrho_1^2\varrho_2, && x_2 = \varrho_1\varrho_2^2, && x_3 = \varrho_3^3,\\
&\text{III.} && x_0 = \varrho_1^2, && x_1 = \varrho_1\varrho_2, && x_2 = \varrho_2^2, && x_3 = \varrho_1\varrho_3,\\
&\text{IV.} && x_0 = \varrho_1^2, && x_1 = \varrho_1\varrho_2, && x_2 = \varrho_2\varrho_3, && x_3 = \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2.
\end{aligned}$$

In den Beispielen I, II, III wird der Kegel $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ dargestellt, und zwar im Beispiel I vollständig. Im Beispiel II fehlt ihm die Mantellinie $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ mit Ausnahme der Spitze mit den Koordinaten 0, 0, 0, 1. Im Beispiel III fehlt ihm ebenfalls diese Mantellinie, aber diesmal einschließlich Spitze und mit Ausnahme des Punktes 0, 0, 1, 0. Im Beispiel IV wird die Fläche $x_0 x_1 x_3 = x_0^2 x_2 + x_1^3$ dargestellt, doch fehlt ihr genau *ein* Punkt, nämlich der Punkt 0, 0, 1, 0.

§ 3.

Resultantensätze.

Das Kriterium in Satz 1 ist bei der praktischen Anwendung recht unhandlich, und außerdem sagt es nichts über die Ordnung der algebraischen Fläche aus. Um günstigere Resultate zu bekommen, brauchen wir einige Sätze über eine gewisse Resultante.

Satz 2. *Wenn die $n+1$ homogenen Polynome*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

alle vom gleichen Grad m sind und wenn $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, dann ist die Resultante

$$\mathsf{P} = R\left(\frac{x_0 f_1 - x_1 f_0}{\varrho_1}, \frac{x_0 f_2 - x_2 f_0}{\varrho_2}, \ldots, \frac{x_0 f_n - x_n f_0}{\varrho_n}\right)$$

als Polynom der Unbestimmten $x_0, \ldots, x_n$ teilbar durch $x^{(n-1)l}$. Setzt man demgemäß

$$\mathsf{P} = x_0^{(n-1)l} F(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist F entweder identisch 0 oder ein homogenes Polynom vom Grad l.

[5]) Sollte zufällig eine der beiden Gleichungen schon von x_ν frei sein, so hat man schon das Gewünschte und braucht natürlich nichts mehr zu eliminieren.

Beweis. Nach Algebra, Satz 120 und § 47. I ist die Resultante P jedenfalls ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl oder identisch 0. Nach Algebra, Satz 147 bleibt sie ungeändert, wenn man in der ersten Zeile zum letzten Glied ein mit einem von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ freien Faktor multipliziertes anderes Glied addiert. Da sie aber außerdem nach Algebra, S. 221 bei Umordnung der Glieder der ersten Zeile sich nur mit ± 1 multipliziert, darf man ebenso zum ν-ten Glied etwa das mit $-\frac{x_\nu}{x_\mu}$ multiplizierte μ-te Glied addieren. Macht man das bei festem μ für alle von μ verschiedenen ν, so geht P über in [6])

$$R\left(\underset{\varrho_\varkappa}{\frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu)}, \underset{\varrho_\mu}{x_0 f_\mu - x_\mu f_0}, \underset{\varrho_\lambda}{\frac{x_0}{x_\mu}(x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu)}\right)$$
$$= \left(\frac{x_0}{x_\mu}\right)^{(n-1)l} \cdot R\left(\underset{\varrho_\varkappa}{x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu}, \underset{\varrho_\mu}{x_0 f_\mu - x_\mu f_0}, \underset{\varrho_\lambda}{x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu}\right).$$

Dabei ist zur Abkürzung $\varkappa$ als Vertreter der Indizes $1, \ldots, \mu - 1$ geschrieben, und λ als Vertreter der Indizes $\mu + 1, \ldots, n$. Der Exponent $(n-1)\,l$ ergibt sich aus Algebra, Satz 120. Da nach dem gleichen Satz die zuletzt angeschriebene Resultante wieder ein Polynom der x_ν ist, ergibt sich, daß die ursprüngliche Resultante P den Faktor $x_0^{(n-1)\,l}$ enthält. Da sie identisch 0 oder ein homogenes Polynom der x_ν vom Grad nl ist, ergibt sich, daß der Restfaktor $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch 0 oder homogen vom Grad $nl - (n-1)l = l$ ist. Zugleich erhält man die Formel

$$(2)\quad R\left(\underset{\varrho_\varkappa}{x_\mu f_\varkappa - x_\varkappa f_\mu}, \underset{\varrho_\mu}{x_0 f_\mu - x_\mu f_0}, \underset{\varrho_\lambda}{x_\mu f_\lambda - x_\lambda f_\mu}\right) = x_\mu^{(n-1)\,l} F(x_0, \ldots, x_n)$$
$$(\varkappa = 1, \ldots \mu - 1;\ \lambda = \mu + 1, \ldots, n).$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 haben die $n+1$ Polynome $f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ dann und nur dann eine gemeinsame Nullstelle* [7]), *wenn das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ identisch verschwindet. Die Koeffizienten von F bilden also, wenn die Koeffizienten der Polynome f_ν selbst Unbestimmte sind, ein Resultantensystem dieser Polynome* [8]).

Beweis. Wenn die Polynome f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so haben die n Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$(3)\qquad x_0 f_\nu - x_\nu f_0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

[6]) Sogar ohne Änderung des Vorzeichens, worauf es aber gar nicht ankommt.

[7]) Unter einer Nullstelle eines homogenen Polynoms ist stets eine nichttriviale Nullstelle zu verstehen. Zwei Nullstellen, die sich nur durch einen Proportionalitätsfaktor unterscheiden, gelten nicht als verschieden.

[8]) Über den Begriff Resultantensystem vgl. Algebra, S. 276.

ebenfalls diese Nullstelle. Daher verschwindet nach Algebra, Satz 139 die Resultante P und folglich auch $F(x_0, \ldots, x_n)$. Wenn umgekehrt F identisch verschwindet, so gilt dasselbe von P, so daß nach Algebra, Satz 139 die Polynome (3) eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben. Setzt man zur Abkürzung

$$\underset{x_0}{f_0(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0)} = \lambda,$$

so ist also

$$f_\nu(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0) = \lambda x_\nu \qquad (\nu = 0, \ldots, n). \tag{4}$$

Wenn wir zeigen können, daß $\lambda = 0$ ist, so heißt das, daß die f_ν die gemeinsame Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ haben, womit Satz 3 bewiesen sein wird.

Nun besteht zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit (vgl. Beweis von Satz 1), etwa vom Grad N:

$$\Sigma C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = N).$$

Nach (4) ist dann

$$\lambda^N \Sigma C_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} = 0,$$

und daraus folgt, da die x_ν Unbestimmte sind, $\lambda = 0$; w. z. b. w.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist die Resultante*

$$R\begin{pmatrix} f_1 - x_1, & \ldots, & f_n - x_n, & f_0 - x_0 \\ \varrho_1 & , \ \ldots, & \varrho_n & , \quad 1 \end{pmatrix}$$

die m-te Potenz des Polynoms $-F(x_0, \ldots, x_n)$.

Wir werden diesen Satz nicht weiter benötigen, weshalb wir auf den Beweis, der sich mit Hilfe von Algebra, Satz 146 führen läßt, verzichten. Der Satz wurde nur aufgeführt, weil er immerhin eine in § 1 gestellte Frage in überraschender Weise teilweise beantwortet.

Satz 5. *Wenn die* $n + 1$ *homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

keine gemeinsame Nullstelle haben, so daß das in Satz 2 eingeführte homogene Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ *nach Satz 3 nicht identisch verschwindet, sondern vom Grad* m^{n-1} *ist, so hat das Formelsystem*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

die Gleichung $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$ *zur Folge; d. h. zwischen den Polynomen* f_ν *besteht die Abhängigkeit* $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$.

Ist umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ *ein Größensystem, für welches* $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ *ist, so gibt es (mindestens) ein Größensystem* $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ *derart, daß die Gleichungen gelten:*

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

Beweis. Es ist nur eine Änderung der Bezeichnung, wenn wir statt von dem Formelsystem im ersten Teil des Satzes von dem Formelsystem

$$x_\nu = f_\nu(y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

reden. Dieses Formelsystem besagt aber, daß das Gleichungssystem mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$

$$x_0 f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

eine Lösung hat, nämlich $\varrho_1 = y_1, \ldots, \varrho_n = y_n$. Daraus folgt nach Algebra, Satz 139, daß die Resultante $\mathfrak{P}$ verschwindet. Daher verschwindet nach Satz 2 auch $F(x_0, \ldots, x_n)$, da ja, sobald die y_ν Unbestimmte sind, $x_0 \neq 0$ ist. Damit ist der erste Teil von Satz 5 bewiesen.

Wenn umgekehrt $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so hat das Gleichungssystem

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

zunächst, falls alle $x_\nu' = 0$ sind, die Lösung $\varrho_1 = 0, \ldots, \varrho_n = 0$, womit dieser triviale Fall erledigt ist. Anderenfalls sei etwa $x_\mu' \neq 0$. Wegen $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$ verschwindet dann nach (2) auch die dortige Resultante mit x_ν' an Stelle von x_ν. Daher hat nach Algebra, Satz 139 das Gleichungssystem

$$x_\mu' f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - x_\nu' f_\mu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0$$
$$(\nu = 1, \ldots, \mu - 1, 0, \mu + 1, \ldots, n)$$

eine Lösung $\varrho_1'', \ldots, \varrho_n''$. Setzt man dann

$$\frac{f_\mu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'')}{x_\mu'} = \lambda,$$

so ist

$$f_\nu(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'') = \lambda x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n). \tag{5}$$

Hierbei ist aber $\lambda \neq 0$, weil ja die Polynome f_ν nach Voraussetzung keine gemeinsame Nullstelle haben. Setzt man daher

$$\frac{\varrho_\nu''}{\sqrt[m]{\lambda}} = \varrho_\nu' \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

so folgt aus (5)

$$f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') = x_\nu' \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

womit auch der zweite Teil von Satz 5 bewiesen ist.

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 5 ist das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der homogenen Polynome f_ν Unbestimmte sind, ist $F(x_0, \ldots, x_n)$ selbst absolut irreduzibel.*

Beweis. Nach Satz 5 verschwindet $F(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch. Zerlegt man das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren:

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$, also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

$$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{6}$$

Wir setzen $F = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

$$F(x_0, \ldots, x_n) = G_1(x_0, \ldots, x_n) H(x_0, \ldots, x_n). \tag{7}$$

Wenn nun die x_ν irgendwie so spezialisiert werden, daß $H = 0$ ist, etwa

$$H(x_0', \ldots, x_n') = 0, \tag{8}$$

so ist nach (7) auch $F(x_0', \ldots, x_n') = 0$, und nach Satz 5 gibt es dann gewisse Größen $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß

$$x_\nu' = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist. Nach (6) ist daher

$$G_1(x_0', \ldots, x_n') = 0. \tag{9}$$

Hiermit ist gezeigt, daß aus (8) allemal (9) folgt. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz (Algebra, Satz 136) ist also eine genügend hohe Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$ durch $H(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher alle mit G_1 äquivalent. Somit ist $F = c G_1^r$, wo c eine Konstante, womit der erste Teil von Satz 6 bewiesen ist.

Der zweite Teil wird bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß unter den neu hinzukommenden Voraussetzungen jedes Polynom $\Phi(x_0, \ldots, x_n)$, für welches $\Phi(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet, durch $F(x_0, \ldots, x_n)$ teilbar ist. Um das zu zeigen, werde wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt, und es sei

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l) \tag{10}$$

und folglich

$$\sum A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} f_0^{\nu_0} f_1^{\nu_1} \ldots f_n^{\nu_n} = 0 \qquad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l). \tag{11}$$

Sind nun $y_1, \ldots, y_{n-1}$ weitere Unbestimmte, so hat das Gleichungssystem

$$f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) - y_\nu f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{12}$$

nach dem Bézoutschen Satz (Algebra, Satz 143) genau l Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

die alle voneinander verschieden sind, und alle $\varrho_{\nu\lambda}$ sind $\neq 0$. Für jede dieser Lösungen ist $f_0 \neq 0$, weil sonst nach (12) auch $f_\nu = 0$ für $\nu \leqq n-1$ wäre, während doch das System

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = 0$$

keine Lösung hat [9]). Man kann daher den in jeder Lösung steckenden willkürlichen Proportionalitätsfaktor so wählen, daß $f_0 = 1$ ist. Aus (11) und (12) folgt dann

$$(13)\quad \Sigma A_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} y_1^{\nu_1} \ldots y_{n-1}^{\nu_{n-1}} [f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})]^{\nu_n} = 0 \quad (\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = l).$$

Nun sind die l Werte $f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})$ voneinander verschieden. Denn wäre etwa

$$f_n(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = f_n(\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}),$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \cdots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_n} \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \cdots \varrho_{n\mu}^{\nu_n},$$

so wäre, weil die Koeffizienten $a_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ Unbestimmte sind [10]),

$$(14)\quad \varrho_{1\lambda}^{\nu_1} \cdots \varrho_{n\lambda}^{\nu_n} = \varrho_{1\mu}^{\nu_1} \cdots \varrho_{n\mu}^{\nu_n} \quad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m,$$

also insbesondere auch $\varrho_{1\lambda}^m = \varrho_{1\mu}^m$, so daß $\dfrac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}}$ eine m-te Einheitswurzel wäre; ebenso $\dfrac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}}, \ldots, \dfrac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}}$. Ist ε eine primitive m-te Einheitswurzel, so wäre also

$$(15)\quad \frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \varepsilon^{\alpha_1}, \ \ldots, \ \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}} = \varepsilon^{\alpha_n},$$

und folglich nach (14)

$$\varepsilon^{\alpha_1 \nu_1 + \ldots + \alpha_n \nu_n} = 1 \qquad \text{für } \nu_1 + \cdots + \nu_n = m.$$

Insbesondere wäre $\varepsilon^{\alpha_j - \alpha_k (m-1)} = 1$, also $\alpha_j \equiv \alpha_k \pmod m$, und folglich nach (15)

$$\frac{\varrho_{1\lambda}}{\varrho_{1\mu}} = \frac{\varrho_{2\lambda}}{\varrho_{2\mu}} = \cdots = \frac{\varrho_{n\lambda}}{\varrho_{n\mu}},$$

so daß $\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}$ und $\varrho_{1\mu}, \ldots, \varrho_{n\mu}$ dieselbe Lösung wären.

---

[9]) Es sind ja n homogene Gleichungen mit n Unbekannten und mit Unbestimmten als Koeffizienten.

[10]) Man beachte, daß die $\varrho_{\nu\lambda}$ als Lösungen des Systems (12) von diesen Unbestimmten unabhängig sind; letztere sind daher auch Unbestimmte in bezug auf den Körper der $\varrho_{\nu\lambda}$.

Hiermit ist gezeigt, daß die l Werte $f_n(\varrho_{1i}, \ldots, \varrho_{ni})$ voneinander verschieden sind. Da sie aber alle die Gleichung (13) befriedigen, so muß in dieser das Glied mit der l-ten Potenz von $f_n(\varrho_{1i}, \ldots, \varrho_{ni})$ wirklich vorkommen. Daher ist $A_{0\ldots0l} \neq 0$, und folglich mit vereinfachter Bezeichnung

$$F(x_0, \ldots, x_n) = A x_n^l + \cdots \qquad (A \neq 0).$$

Hiernach ergibt sich, wenn man Φ durch F teilt, nach Algebra, Satz 71 eine Relation der Form

$$(16) \quad \Phi(x_0, \ldots, x_n) = F(x_0, \ldots, x_n) Q(x_0, \ldots, x_n) + R(x_0, \ldots, x_n),$$

wo Q und R nicht nur in bezug auf x_n, sondern in bezug auf alle x_ν Polynome sind, und wo der Grad von R in bezug auf x_n kleiner als l ist. Wenn nun R nicht identisch verschwände, so könnte man mit Bezug auf R dieselbe Überlegung durchführen wie seither mit Bezug auf F und würde finden, daß R in bezug auf x_n nicht von kleinerem als dem l-ten Grad sein könnte. Daher muß $R = 0$ sein, und aus (16) folgt, daß Φ durch F teilbar ist. W. z. b. w.

§ 4.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 7. *Das rationale Gebilde*

$$(A) \qquad x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

ist, wenn die homogenen Polynome m-ten Grades f_ν keine gemeinsame Nullstelle haben [11]*, identisch mit der algebraischen Fläche $F(x_0, \ldots, x_n) = 0$, wo F das in Satz 2 eingeführte und nach Satz 3 nicht identisch verschwindende homogene Polynom ist.*

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, da er nur die geometrisierte Formulierung von Satz 5 ist. Der Satz besagt, wie zur Vermeidung von Irrtümern ausdrücklich bemerkt sei, nur, daß jeder Punkt des rationalen Gebildes auf der Fläche $F = 0$ liegt und daß umgekehrt jeder Punkt dieser Fläche auch dem rationalen Gebilde angehört, d. h. daß seine Koordinaten sich in der Gestalt (A) darstellen lassen. Dagegen wird nicht behauptet, daß diese Darstellung etwa nur auf *eine* Art möglich sei; sie kann für einzelne oder auch für alle Flächenpunkte auf mehrere Arten möglich sein, wobei proportionale Darstellungen, also eine Darstellung durch die Parameterwerte $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und eine zweite durch $\varepsilon\varrho_1, \ldots, \varepsilon\varrho_n$, unter ε eine m-te Einheitswurzel verstanden, natürlich nicht als verschieden anzusehen sind. Von näheren Untersuchungen in dieser Richtung, die an sich sehr wünschens-

[11]) Sie sind dann von selbst relativ prim, so daß diese in § 1 erhobene Forderung hier nicht eigens gestellt zu werden braucht.

wert wären, müssen wir in dieser Arbeit absehen. Bemerkt sei nur, daß die Anzahl der Darstellungen in der Form (A) sich durchaus nicht mit der Vielfachheit des betreffenden Flächenpunktes im Sinne der algebraischen Geometrie zu decken braucht.

Satz 8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7 zerfällt die Fläche $F = 0$ nie in zwei verschiedene algebraische Flächen; wohl aber kann sie eine im Sinne der algebraischen Geometrie mehrfach zählende Fläche sein. Die Ordnung der (einfach gezählten) Fläche ist gleich m^{n-1} oder ein Teiler von m^{n-1}. Insbesondere im allgemeinen Fall, d. h. wenn die Koeffizienten der Polynome f_ν Unbestimmte sind, ist die Fläche nur einfach zählend und hat die Ordnung m^{n-1}.*

Das ergibt sich unmittelbar aus Satz 6.

Beispiel I. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_2^2, \quad f_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 2$ und die Polynome sind ohne gemeinsame Nullstelle. Da $n = 2$ ist, läßt sich die Resultante P als Sylvestersche Determinante schreiben:

$$\mathsf{P} = R\left(\underset{\varrho_1}{x_0\varrho_2^2 - x_1\varrho_1^2}, \quad \underset{\varrho_2}{x_0(a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2) - x_2\varrho_1^2}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & x_0 \\ ax_0 - x_2 & bx_0 & cx_0 & 0 \\ 0 & ax_0 - x_2 & bx_0 & cx_0 \end{vmatrix} = x_0^2[(ax_0 + cx_1 - x_2)^2 - b^2x_0x_1].$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^2; also ist

$$F = (ax_0 + cx_1 - x_2)^2 - b^2x_0x_1.$$

Falls $b \neq 0$, ist F irreduzibel und die Fläche (Kurve) von zweiter Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf genau *eine* Art in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + b\varrho_1\varrho_2 + c\varrho_2^2$$

darstellen. Falls $b = 0$, ist F die zweite Potenz eines linearen Polynoms, die Kurve also von erster Ordnung. Jeder Punkt der Kurve läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_2^2, \quad x_2 = a\varrho_1^2 + c\varrho_2^2$$

darstellen, außer den beiden Punkten $0, 1, c$ und $1, 0, a$, die nur *eine* Darstellung zulassen.

Beispiel II. $\quad f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2.$

Hier ist $m = 2$, $n = 3$ und die Polynome sind wieder ohne gemeinsame Null-

stelle. Nach den Rechenregeln für Resultanten (Algebra, S. 221 f. und Satz 148) findet man

$$\begin{aligned}
\mathsf{P} &= R\Big(\frac{x_0\varrho_1\varrho_2 - x_1\varrho_1^2}{\varrho_1}, \frac{x_0\varrho_2^2 - x_2\varrho_1^2}{\varrho_2}, \frac{x_0\varrho_3^2 - x_3\varrho_1^2}{\varrho_3}\Big) \\
&= \prod_{\varepsilon,\eta} R\Big(\varrho_1, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1}{\varrho_3}\Big)\times \\
&\quad\times \prod_{\varepsilon,\eta} R\Big(\frac{x_0\varrho_2 - x_1\varrho_1}{\varrho_1}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_2 - \varepsilon\sqrt{x_2}\,\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\sqrt{x_0}\,\varrho_3 - \eta\sqrt{x_3}\,\varrho_1}{\varrho_3}\Big) \quad (\varepsilon,\eta = \pm 1) \\
&= \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix} \cdot \prod_{\varepsilon,\eta} \begin{vmatrix} -x_1 & x_0 & 0 \\ -\varepsilon\sqrt{x_2} & \sqrt{x_0} & 0 \\ -\eta\sqrt{x_3} & 0 & \sqrt{x_0} \end{vmatrix} \\
&= x_0^4 \cdot (x_0^3 x_2 - x_0^2 x_1^2)^2.
\end{aligned}$$

F ergibt sich nach Abspaltung des Faktors x_0^8; also ist

$$F = (x_0 x_2 - x_1^2)^2.$$

F ist die zweite Potenz eines irreduziblen Polynoms zweiten Grades; die Fläche ist der Kegel $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$ (vgl. auch S. 470, Beispiel I). Jeder Punkt des Kegels läßt sich auf *zwei* Arten in der Gestalt

$$x_0 = \varrho_1^2, \quad x_1 = \varrho_1\varrho_2, \quad x_2 = \varrho_2^2, \quad x_3 = \varrho_3^2$$

darstellen, mit Ausnahme der Kegelspitze 0, 0, 0, 1 und der Schnittpunkte mit der Ebene $x_3 = 0$, die nur je *eine* Darstellung zulassen.

Die Beispiele dienen zur Illustration unserer Sätze und der verschiedenen vorkommenden Fälle. Die Elimination selbst ließe sich natürlich auch viel einfacher durchführen.

§ 5.

Andere Gewinnung des Polynoms $F(x_0, \ldots, x_n)$.

Bei der Wichtigkeit des Polynoms F wird man den Wunsch haben, zu ihm zu gelangen ohne den Umweg über die Resultante P, da die Berechnung einer Resultante für $n > 2$ bekanntlich eine äußerst komplizierte Sache ist. Dabei wird es natürlich erlaubt sein, die Koeffizienten der f_ν als Unbestimmte vorauszusetzen. Alsdann hat aber nach Satz 5 das Polynom $F(x_0, \ldots, x_n)$ die Eigenschaft, daß $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$ ist, und beim Beweis des zweiten Teiles von Satz 6 ergab sich, daß jedes Polynom Φ mit derselben Eigenschaft durch F teilbar ist. Daher ist F durch diese Eigenschaft und durch seinen Grad m^{n-1} bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

Nun habe ich kürzlich gerade die Existenz eines solchen Polynoms auf ganz andere Art bewiesen [12]) und dieser Beweis enthält zugleich eine Methode zur Herstellung des Polynoms. Das Verfahren ist folgendes:

Bezeichnet man die Potenzprodukte

$$\varrho_1^{r_1}\varrho_2^{r_2}\dots\varrho_n^{r_n}$$

$$\text{für } 0 \leqq r_\nu \leqq m-1, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_n \equiv 0 \pmod m,$$

deren Anzahl gleich $m^{n-1} = l$ ist, in irgendeiner Reihenfolge mit $U_1, \dots, U_l$, so kann man l^2 Polynome $\Phi_{\lambda\mu}(x_1, \dots, x_n)$ so bestimmen, daß die Identitäten gelten:

$$f_0 U_\lambda = \sum_{\mu=1}^{l} \Phi_{\lambda\mu}(f_1, \dots, f_n) U_\mu \qquad (\lambda = 1, \dots, l), \tag{17}$$

woraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{11} - f_0 & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{l1} & \Phi_{l2} & \dots & \Phi_{ll} - f_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Die Polynome $\Phi_{\lambda\mu}$, d. h. ihre Koeffizienten, ergeben sich dabei aus einem linearen Gleichungssystem mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten, und die bei der Auflösung auftretende Nennerdeterminante ist von 0 verschieden. Die Relation (18) ist in bezug auf die f_ν homogen vom Grad l und ist daher, von einem konstanten Faktor abgesehen, gerade die Relation $F(f_0, \dots, f_n) = 0$.

In Spezialfällen, wenn die Koeffizienten der f_ν keine Unbestimmte sind, lassen sich die $\Phi_{\lambda\mu}$ unter Umständen viel einfacher ermitteln. Aber es kann auch sein, daß die Berechnung unmöglich wird, weil die erwähnte Nennerdeterminante gleich 0 ist. Sie ist jedoch gewiß von 0 verschieden, wenn für $\nu = 1, \dots, n$ der Koeffizient a_ν von ϱ_ν^m in f_ν von 0 verschieden, und zwar eine Unbestimmte ist. Das kann oft schon, wenn es nicht von vornherein der Fall ist, durch Umnumerieren der f_ν erreicht werden. Wenn nicht, so kann man die fehlenden Glieder zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten ergänzen, mit diesen die Rechnung durchführen und im Endresultat die Unbestimmten spezialisieren. Denn die Koeffizienten von F sind, wie sich aus der Definition von F ergibt, mit ganzzahligen Koeffizienten versehene Polynome der Koeffizienten der f_ν; man bekommt also F für beliebig spezialisierte f_ν, indem man die Rechnung zunächst mit Unbestimmten als Koeffizienten irgendwie durchführt und im Endresultat die Spezialisierung vornimmt.

Beispiel. $f_0 = \varrho_1^2$, $f_1 = \varrho_1\varrho_2$, $f_2 = \varrho_2^2$, $f_3 = \varrho_3^2$.

[12]) In § 3 der in Fußnote [3]) zitierten Arbeit.

Die Potenzprodukte U_λ sind hier: $1, \varrho_1\varrho_2, \varrho_1\varrho_3, \varrho_2\varrho_3$. In f_1 fehlt das Glied mit ϱ_1^2. Nimmt man aber eine Umnumerierung vor, indem man f_0 und f_1 ihre Rollen tauschen läßt, so hat man das Gewünschte, und die Identitäten (17) sind ohne weiteres hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}
f_1 \cdot 1 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_1\varrho_2 &= f_0 f_2 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_1\varrho_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_3 + f_0 \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_1 \cdot \varrho_2\varrho_3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot \varrho_1\varrho_2 + f_2 \cdot \varrho_1\varrho_3 + 0 \cdot \varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} -f_1 & 1 & 0 & 0 \\ f_0 f_2 & -f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_1 & f_0 \\ 0 & 0 & f_2 & -f_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder $(f_1^2 - f_0 f_2)^2 = 0$. In der Tat wurde auch in § 4 bei diesem Beispiel gefunden: $F = (x_0 x_2 - x_1^2)^2$.

Ohne Umnumerierung kann man so verfahren, daß man zunächst das allgemeinere Polynomsystem

$$f_0 = \varrho_1^2, \quad f_1 = a\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2, \quad f_2 = \varrho_2^2, \quad f_3 = \varrho_3^2$$

mit der Unbestimmten a betrachtet. Um ganz sicher zu gehen, könnte man $f_2 - b\varrho_2^2$, $f_3 - c\varrho_3^2$ setzen; doch sieht man leicht voraus, daß die Rechnung auch gehen muß, wenn man von Anfang an b und c zu 1 spezialisiert. Das System (17) ist jetzt das folgende:

$$\begin{aligned}
f_0 \cdot 1 &= \frac{f_1}{a} \cdot 1 - \frac{1}{a} \cdot \varrho_1\varrho_2 + * + *,\\
f_0 \cdot \varrho_1\varrho_2 &= -\frac{f_1 f_2}{a^2} \cdot 1 + \frac{a f_1 + f_2}{a^2} \cdot \varrho_1\varrho_2 + * + *,\\
f_0 \cdot \varrho_1\varrho_3 &= * + * + \frac{a f_1 + f_2}{a^2} \cdot \varrho_1\varrho_3 - \frac{f_1}{a^2} \cdot \varrho_2\varrho_3,\\
f_0 \cdot \varrho_2\varrho_3 &= * + * - \frac{f_2}{a} \cdot \varrho_1\varrho_3 + \frac{f_1}{a} \cdot \varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}$$

Also kommt

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{a} - f_0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{f_1 f_2}{a^2} & \frac{a f_1 + f_2}{a^2} - f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a f_1 + f_2}{a^2} - f_0 & -\frac{f_1}{a^2} \\ 0 & 0 & -\frac{f_2}{a} & \frac{f_1}{a} - f_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{a^6}[(f_1 - a f_0)(f_2 + a f_1 - a^2 f_0) - f_1 f_2]^2 = 0.$$

Nach Multiplikation mit a^4 (nicht erst mit a^6) läßt sich der Nenner wegheben und man erhält:

$$(f_1^2 - f_0 f_2 - 2 a f_0 f_1 + a^2 f_0^2)^2 = 0.$$

Wenn man jetzt a zu 0 spezialisiert, kommt wieder wie vorhin: $(f_1^2 - f_0 f_2)^2 = 0$.

Eine elegante Darstellung gestattet das Polynom F im Falle $n = 2$. Setzt man nämlich in diesem Falle

$$f_0 = a_0 \varrho_1^m + a_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + a_m \varrho_2^m,$$
$$f_1 = b_0 \varrho_1^m + b_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + b_m \varrho_2^m,$$
$$f_2 = c_0 \varrho_1^m + c_1 \varrho_1^{m-1} \varrho_2 + \cdots + c_m \varrho_2^m,$$

so läßt sich die Resultante P als $(2m)$-reihige Sylvesterssche Determinante schreiben. Diese kann man leicht durch Ränderung in eine $(3m)$-reihige Determinante verwandeln, von der sich der Faktor x_0^m abspalten läßt, so daß gerade F übrigbleibt. Man erhält so die Darstellung

$$F(x_0, x_1, x_2) = \begin{array}{|cccccccccc|l} \overbrace{x_0 & 0 & \dots & 0}^{m} & \overbrace{a_0 & a_1 & \dots & a_m}^{m+1} & \overbrace{0 & \dots & 0}^{m-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 & m+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2 & 0 & \dots & 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_m & 0 & \dots & 0 & 2m+1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array},$$

und zwar ist diese Determinante so gebildet, daß nach der angeschriebenen ersten, $(m+1)$-ten und $(2m+1)$-ten Zeile immer noch $(m-1)$-mal dieselbe Zeile kommt, aber jedesmal um eine weitere Stelle zyklisch nach rechts verschoben wie bei einer Sylvesterschen Determinante. Man sieht auch leicht direkt, daß die obige Determinante die das Polynom F charakterisierenden Eigenschaften hat: Sie ist in bezug auf die x_i ein homogenes Polynom m-ten Grades [13]), und wenn man x_i durch f_i ersetzt, verschwindet sie; denn wenn man alsdann die Spalten der Reihe nach mit

$$\varrho_1^{m-1}, \varrho_1^{m-2}\varrho_2, \dots, \varrho_2^{m-1}, -\varrho_1^{2m-1}, -\varrho_1^{2m-2}\varrho_2, \dots, -\varrho_2^{2m-1}$$

multipliziert und zueinander addiert, kommt in jeder Zeile 0.

[13]) Nicht etwa identisch 0; denn z. B. der Koeffizient von x_0^m ist die Resultante von f_1 und f_2, verschwindet also gewiß nicht, wenn die Koeffizienten der f_i Unbestimmte sind.

§ 6.

Eine weitere Resultante.

Wenn die f_ν eine gemeinsame Nullstelle haben, so verschwindet F nach Satz 3 identisch, so daß man auf die bisherige Weise zu keiner Flächengleichung gelangt. Zwar gibt es nach Satz 5 der in Fußnote [3]) erwähnten Arbeit auch in diesem Falle eine homogene Identität vom Grad m^{n-1} zwischen den f_ν. Aber wir werden jetzt auf ganz andere Art sehen, daß es sogar *eine Identität von geringerem Grad gibt, so daß die Ordnung der Fläche sich erniedrigt.* Dazu benötigen wir einige vorbereitende Sätze. Unerledigt wird allerdings der Fall bleiben, daß die f_ν *unendlich viele* gemeinsame Nullstellen haben.

Die n homogenen Polynome m-ten Grades

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \tag{19}$$

mögen endlich viele gemeinsame Nullstellen haben (eventuell gar keine). Sind dann $u_1, \ldots, u_n$ Unbestimmte, so haben die $n+1$ Polynome

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu,$$

wo die Summe nach ν von 1 bis n läuft, offenbar gar keine gemeinsame Nullstelle. Dann haben aber auch, wenn $x_1, \ldots, x_n, y$ weitere Unbestimmte sind, die $n+1$ homogenen Polynome von $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$

$$f_1 - x_1\sigma^m, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m, \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \tag{20}$$

keine gemeinsame Nullstelle. Denn nach dem bereits Gesagten haben sie jedenfalls keine mit $\sigma = 0$. Hätten sie eine andere, so könnte man $\sigma = 1$ annehmen, und das Gleichungssystem

$$f_1 = x_1, \quad \ldots, \quad f_n = x_n, \quad \Sigma u_\nu \varrho_\nu = y$$

hätte eine Lösung. Aber zwischen den $n+1$ links stehenden Polynomen besteht nach Algebra, Satz 56 eine Abhängigkeit; die gleiche Abhängigkeit müßte dann zwischen $x_1, \ldots, x_n, y$ bestehen, während das doch Unbestimmte sind.

Nachdem hiermit gezeigt ist, daß die Polynome (20) keine gemeinsame Nullstelle haben, folgt aus Algebra, Satz 139, daß die Resultante

$$\mathsf{T} = R\begin{pmatrix} f_1 - x_1\sigma^m, & \ldots, & f_n - x_n\sigma^m, & \Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1, & \ldots, & \varrho_n, & \sigma \end{pmatrix} \tag{21}$$

nicht verschwindet. Daraus folgt aber weiter (Algebra, S. 290), daß das Gleichungssystem

$$f_1 - x_1\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x_n\sigma^m = 0 \tag{22}$$

nur endlich viele Lösungen hat, und wir gewinnen den

Satz 9. *Wenn die n homogenen Polynome* (19) *vom Grad m nur endlich viele gemeinsame Nullstellen haben (eventuell gar keine), so hat auch, wenn $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, das homogene Gleichungssystem* (22) *mit den Unbekannten $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma$ nur endlich viele Lösungen.*

Die Anzahl der Lösungen des Systems (22) ist nach dem Bézoutschen Satz, wenn jede ihrer Multiplizität entsprechend gezählt wird, gleich m^n (Algebra, Satz 145). Unter diesen finden sich, falls die Polynome (19) wirklich gemeinsame Nullstellen haben, auch Lösungen mit $\sigma = 0$, und die zugehörigen Systeme $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ sind dann gerade diese gemeinsamen Nullstellen. Das gibt Veranlassung zu folgender

Definition. *Als Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ der Polynome* (19) *bezeichnen wir die (Bézoutsche) Multiplizität der Lösung $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0, 0$ des Gleichungssystems* (22), *bei dem $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind.*

Bemerkung. Der allgemein anerkannte Multiplizitätsbegriff, den wir hier durch den Namen Bézout kennzeichnen, bezieht sich immer auf den Fall, daß die Anzahl der homogenen Gleichungen um 1 kleiner ist als die der Unbekannten. Es gibt aber auch verschiedene Multiplizitätsdefinitionen, die auf das Gleichungssystem passen, das durch Nullsetzen der Polynome (19) entsteht, und manche Mathematiker mögen vielleicht noch ihre privaten Vorstellungen von diesem Begriff haben. Was wir hier als „Pseudomultiplizität" definieren, deckt sich damit nicht, sondern hat oft (vielleicht immer) einen größeren Wert als die Multiplizität. Im Falle $n = 2$ hat z. B. das Gleichungssystem

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2)^{m-1} = 0$$

nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, der wohl niemand eine andere Multiplizität als 1 zuerkennen wird; die Pseudomultiplizität ist aber m. Das System

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0, \quad (\varrho_1 - \varrho_2)^m = 0 \quad \text{(zweimal dieselbe Gleichung)}$$

hat wieder nur die eine Lösung $\varrho_1 = \varrho_2$, diesmal mit der Multiplizität m; die Pseudomultiplizität ist aber m^2.

Ist nun die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen der Polynome (19), wenn jede ihrer Pseudomultiplizität entsprechend gezählt wird, gleich p, wobei dann $0 \leq p \leq m^n$ ist, und bezeichnet man diese Nullstellen mit

$$\varrho_{1\lambda}^0, \ldots, \varrho_{n\lambda}^0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, p), \tag{23}$$

so hat das System (22), wenn jede Lösung ihrer (Bézoutschen) Multiplizität entsprechend gezählt wird, noch $m^n - p$ Lösungen

$$\varrho_{1\lambda}^*, \ldots, \varrho_{n\lambda}^*, \sigma_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, m^n - p), \tag{24}$$

bei denen $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, und bei geeigneter Wahl des in einer Lösung steckenden willkürlichen Faktors ergibt sich für die Resultante T, wenn wieder $m^{n-1} = l$ gesetzt wird, der Ausdruck (Algebra, S. 290)

$$\mathsf{T} = \prod_{\lambda=1}^{p} (\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda}^{0}) \cdot \prod_{\lambda=1}^{lm-p} (\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda}^{*} - y\sigma_\lambda), \tag{25}$$

wobei im Falle $p = 0$ das erste, im Falle $p = lm$ das zweite Produkt durch 1 zu ersetzen ist.

Andererseits ist aber T ein Polynom der Gestalt

$$\mathsf{T} = \Sigma \Phi_{\lambda_1 \dots \lambda_n \mu}(u_1, \dots, u_n)\, x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n} y^\mu, \tag{26}$$

wobei nach Algebra, Satz 121 in jedem Glied

$$m\lambda_1 + m\lambda_2 + \cdots + m\lambda_n + \mu = m^n \tag{26a}$$

und wobei $\Phi_{\lambda_1 \dots \lambda_n \mu}$ nach Algebra, Satz 120 ein homogenes Polynom der u_ν vom Grad $m^n - \mu$ oder identisch 0 ist. Wegen (26a) sind alle μ durch m teilbar; T ist also ein Polynom von y^m, und aus (25) folgt dann, daß auch p durch m teilbar ist: $p = qm$; es ist dann $0 \leqq q \leqq l$. Aus (25) folgt weiter, daß sich in (26) ein homogenes in Linearfaktoren zerlegbares Polynom der u_ν allein vom Grad $p = qm$ abspaltet, so daß man für T schließlich die folgende Gestalt erhält:

$$\mathsf{T} = \Phi(u_1, \dots, u_n)\,[\Omega_0 y^{m(l-q)} + \Omega_1 y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega_{l-q}]. \tag{27}$$

Dabei ist $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ einfach das erste Produkt in Formel (25), also homogen vom Grad $p = qm$; speziell für $p = 0$, also $q = 0$ ist $\Phi = 1$. Ferner ist

$$\Omega_\lambda = \Omega_\lambda(u_1, \dots, u_n;\ x_1, \dots, x_n)$$

entweder identisch 0 oder in bezug auf die u_ν homogen vom Grad λm und in bezug auf die x_ν homogen vom Grad $q + \lambda$. Speziell Ω_0 ist nicht identisch 0, sondern also ein Polynom von $x_1, \dots, x_n$ allein, homogen vom Grad q:

$$\Omega_0 = \Omega_0(x_1, \dots, x_n). \tag{28}$$

Von jetzt an bis § 8 einschließlich setzen wir $q < l$, also $p < lm$ voraus, so daß in (25) das zweite Produkt nicht durch 1 zu ersetzen ist. In diesem Produkt muß dann, da T ein Polynom von y^m ist, neben dem Faktor

$$\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda}^{*} - y\sigma_\lambda$$

stets auch der Faktor

$$\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda}^{*} - y\sigma_\lambda \varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit der gleichen Vielfachheit vorkommen. Es ist ja auch von vornherein klar, daß das System (22) neben der Lösung (24) stets auch die Lösung

$$\varrho_{1\lambda}^{*}, \dots, \varrho_{n\lambda}^{*}, \sigma_\lambda \varepsilon$$

hat; darüber hinaus sehen wir aber jetzt, daß die m zu den verschiedenen m-ten Einheitswurzeln ε gehörenden Lösungen dieselbe Multiplizität haben. Faßt man jetzt im zweiten Produkt von (25) je m Faktoren, bei denen die σ_λ sich nur um m-te Einheitswurzeln unterscheiden, zusammen und setzt $\varrho^*_{\nu\lambda}\sigma_\lambda^{-1} = \varrho_{\nu\lambda}$, so kommt

$$\mathsf{T} = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda})^m], \tag{29}$$

wobei Φ und Ω_0 dieselben Polynome wie in (27), (28) sind. Nach der Bedeutung der $\varrho_{\nu\lambda}$ ist natürlich

$$f_\nu(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}) = x_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q). \tag{30}$$

Ein Vergleich der Formeln (27) und (29) lehrt, daß die symmetrischen Grundfunktionen der $l - q$ Größen

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu 1}\Big)^m, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu 2}\Big)^m, \quad \ldots, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu, l-q}\Big)^m$$

bekannt sind. Daher sind auch die Potenzsummen dieser Größen

$$\sum_{\lambda=1}^{l-q}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \varrho_{\nu\lambda}\Big)^{rm} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und folglich die Potenzproduktsummen

$$\sum_{\lambda=1}^{l-q} \varrho_{1\lambda}^{\mu_1} \varrho_{2\lambda}^{\mu_2} \ldots \varrho_{n\lambda}^{\mu_n} \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = rm) \tag{31}$$

bekannt; und zwar sind die letzteren rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0^r.

Wenn die Koeffizienten der f_ν Unbestimmte sind, die wir vorübergehend mit $\xi_1, \ldots, \xi_k$ bezeichnen wollen, so haben die f_ν keine gemeinsame Nullstelle; daher ist in diesem Falle

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \Phi(u_1, \ldots, u_n) = 1, \quad \Omega_0(x_1, \ldots, x_n) = \text{konstant}.$$

Alsdann lehrt aber die Formel (29), wenn man die Resultante T speziell für $y = 0$ mit T_0 bezeichnet, daß T_0 die m-te Potenz eines Polynoms der u_ν ist:

$$\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}_0(u_1, \ldots, u_n) \qquad [V(u_1, \ldots, u_n)]^m.$$

Nach der Definitionsformel (21) sind die Koeffizienten von T_0 (vielleicht aber nicht die von V) Polynome der Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Sie erfüllen natürlich, da T_0 eine m-te Potenz ist, die Bedingungsgleichungen, die nach dem m-ten in § 10 bewiesenen Hilfssatz dafür notwendig sind. Diese Bedingungsgleichungen sind aber Identitäten in den Unbestimmten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ und bleiben daher erfüllt, wenn diese Unbestimmten nachträglich spezialisiert werden. Da sie auch hinreichend sind, muß T_0 auch nach der Spezialisierung eine m-te

Potenz bleiben, so daß in Formel (29) für $y = 0$ stets eine m-te Potenz steht. Da dann aber das Produkt bereits eine m-te Potenz ist, ergibt sich, daß auch Φ eine sein muß:

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = [\Psi(u_1, \ldots, u_n)]^m. \tag{32}$$

In (25) ist daher das erste Produkt, welchem ja Φ gleich war, eine m-te Potenz, so daß die Faktoren zu je m einander gleich sind. Daraus folgt

Satz 10. *Die Pseudomultiplizität einer gemeinsamen Nullstelle der Polynome* (19) *ist stets durch m teilbar.*

§ 7.

Fortsetzung.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades und sei x_0 eine weitere Unbestimmte. Dann gibt es (vgl. den Beweis von Satz 1) ein homogenes absolut irreduzibles Polynom $P(x_0, \ldots, x_n)$ derart, daß $P(f_0, \ldots, f_n)$ als Polynom der ϱ_ν identisch verschwindet. P sei etwa vom Grad N, also

$$P(x_0, \ldots, x_n) - \sum C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} x_0^{\lambda_0} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \quad (\lambda_0 + \cdots + \lambda_n - N), \tag{33}$$

$$P(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{34}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß also $C_{N\,0\ldots0} \neq 0$ ist. Aus der Identität (34) folgt dann, daß f_0 an den gemeinsamen Nullstellen von $f_1, \ldots, f_n$ ebenfalls verschwindet. Da die Potenzproduktsummen (31) rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind, so ist auch das Produkt

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] \tag{35}$$

ein Polynom von x_0, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Aus (34) folgt mit Rücksicht auf (30) insbesondere

$$P(f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda}), x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Daher ist $P(x_0, \ldots, x_n)$ als Polynom von x_0 durch jeden Faktor des Produkts (35) teilbar und eine genügend hohe Potenz von $P(x_0, \ldots, x_n)$ ist durch das ganze Produkt (35) teilbar. Hieraus folgt, da in P das Glied mit x_0^N wirklich vorkommt, daß das Produkt (35) sogar in bezug auf alle x_ν ein Polynom ist (Algebra, Satz 93). Da es Teiler von einer Potenz des homogenen Polynoms P ist, ist es außerdem homogen, und zwar vom Grad $l - q$. Setzt man demgemäß

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}, \ldots, \varrho_{n\lambda})] = Q(x_0, \ldots, x_n), \tag{36}$$

so ist, da Q ein Teiler von einer Potenz des absolut irreduziblen Polynoms P ist, wegen (34)

$$Q(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{37}$$

Im Falle $q = 0$, d. h. wenn die Polynome $f_1, \ldots, f_n$ keine gemeinsame Nullstelle haben, ist Q, von einem konstanten Faktor abgesehen, das frühere Polynom F; denn Q hat alsdann die zu Beginn des § 5 für F als charakteristisch erkannten Eigenschaften. Für $q > 0$ wird es eine analoge Rolle spielen.

Nun seien umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ irgendwelche Größen, für die

$$Q(x_0', \ldots, x_n') = 0 \tag{38}$$

ist; außerdem sei aber

$$\Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \neq 0. \tag{39}$$

Bildet man dann die Resultante

$$\mathsf{T}' = R\begin{pmatrix} f_1 - x_1'\sigma^m, & \ldots, & f_n - x_n'\sigma^m, & \sum u_\nu \varrho_\nu - y\sigma \\ \varrho_1 & , \ \ldots, & \varrho_n & , \quad \sigma \end{pmatrix}, \tag{40}$$

die sich von T nur dadurch unterscheidet, daß die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ zu $x_1', \ldots, x_n'$ spezialisiert sind, so ist nach (27)

$$\mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\,[\Omega_0' y^{m(l-q)} + \Omega_1' y^{m(l-q-1)} + \cdots + \Omega_{l-q}'], \tag{41}$$

wobei $\Omega_\lambda' = \Omega_\lambda(u_1, \ldots, u_n;\ x_1', \ldots, x_n')$ ist, wegen (39) also insbesondere

$$\Omega_0' = \Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \neq 0. \tag{42}$$

Daher ist $\mathsf{T}' \neq 0$, und daraus folgt, daß das Gleichungssystem

$$f_1 - x_1'\sigma^m = 0, \quad \ldots, \quad f_n - x_n'\sigma^m = 0 \tag{43}$$

ebenso wie das System (22) nur endlich viele Lösungen hat. Und zwar hat es, wie der Faktor $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ in (41) lehrt, zunächst die $p = qm$ Lösungen des Systems (22):

$$\varrho_{1\lambda}^0, \ldots, \varrho_{n\lambda}^0, 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, qm). \tag{44}$$

Es hat aber keine weiteren Lösungen mit $\sigma = 0$, weil in der eckigen Klammer von (41) das erste Glied von den u_ν frei ist und nach (42) nicht verschwindet, so daß sich kein weiterer Faktor, der ein Polynom der u_ν allein ist, abspalten läßt. Das System (43) hat also außer den Lösungen (44) nur noch Lösungen, bei denen $\sigma \neq 0$ ist. Da T' nach (41) ein Polynom von y^m ist, so ist analog wie bei dem System (22) neben einer Lösung

$$\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}', \sigma_\lambda$$

stets auch die Lösung

$$\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}', \sigma_\lambda \varepsilon,$$

wo ε eine beliebige m-te Einheitswurzel ist, mit gleicher Multiplizität vorhanden, und da $\sigma_\lambda \neq 0$ ist, also gleich 1 angenommen werden kann, ergibt

sich analog zu (29) die Formel

$$\mathsf{T}' = \Phi(u_1, \ldots, u_n)\, \Omega_0(x_1', \ldots, x_n') \prod_{\lambda=1}^{l-q} [y^m - (\Sigma u_\nu \varrho_{\nu\lambda}')^m]. \tag{45}$$

Durch Vergleich von (45) mit (41) erkennt man, daß die Potenzproduktsummen, die entstehen, wenn man in den Potenzproduktsummen (31), die ja rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Nenner Ω_0^r waren, die $\varrho_{\nu\lambda}$ durch $\varrho_{\nu\lambda}'$ ersetzt, wieder bekannt sind; man erhält sie einfach, indem man in den erwähnten rationalen Funktionen die x_ν zu x_ν' spezialisiert, was wegen der Voraussetzung (39) möglich ist. Nach (36) ist daher

$$\prod_{\lambda=1}^{l-q} [x_0 - f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}')] = Q(x_0, x_1', \ldots, x_n'). \tag{46}$$

Dabei genügen die $\varrho_{\nu\lambda}'$ dem zu (30) analogen Gleichungssystem

$$f_\nu(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_\nu' \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, l-q).$$

Für wenigstens einen Wert λ gilt aber außerdem auch die Gleichung

$$f_0(\varrho_{1\lambda}', \ldots, \varrho_{n\lambda}') = x_0',$$

wie ein Vergleich von (46) für den Spezialwert $x_0 = x_0'$ mit (38) lehrt. Die gewonnenen Resultate fassen wir zusammen in dem folgenden Analogon zu Satz 5:

Satz 11. *Die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mögen qm gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, und es sei[14]*: $q < m^{n-1}$.*

Wenn dann $f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ ein weiteres homogenes Polynom m-ten Grades ist und wenn zwischen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^N einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat[15]*, dann ist das in (36) eingeführte Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ homogen vom Grad $m^{n-1} - q$. Sein von $x_1, \ldots, x_n$ freies Glied hat einen von 0 verschiedenen Koeffizienten (nämlich offenbar 1) und das Polynom hat die Eigenschaft, daß zwischen den f_ν die Abhängigkeit $Q(f_0, \ldots, f_n) = 0$ besteht.*

Wenn umgekehrt $x_0', \ldots, x_n'$ irgendein Größensystem ist, für welches $Q(x_0', \ldots, x_n') = 0$ ist, so gibt es im allgemeinen (mindestens) ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$, für welches die Gleichungen gelten:

$$x_\nu' \quad f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 0, \ldots, n).$$

[14]) Nach § 6 ist stets $q \leqq m^{n-1}$. Der Fall $q = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

[15]) Die beim Beweis vorausgesetzte absolute Irreduzibilität von P braucht hier natürlich nicht gefordert zu werden, da man an Stelle von P ja stets einen geeigneten irreduziblen Teiler von P betrachten kann.

Eine Ausnahme besteht höchstens bei solchen Systemen x_i', für die auch $\Omega_0(x_1', \ldots, x_n') = 0$ ist, wo Ω_0 das in (27), (28) eingeführte homogene Polynom vom Grad q bedeutet.

Auch zu Satz 6 gibt es ein Analogon:

Satz 12. *Unter den Voraussetzungen des ersten Teiles von Satz 11 ist das Polynom $Q(x_0, \ldots, x_n)$ entweder absolut irreduzibel oder eine Potenz eines absolut irreduziblen Polynoms.*

Beweis. Zerlegt man das Polynom Q, falls es reduzibel ist, in irreduzible Faktoren

$$Q(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{\lambda=1}^{r} G_\lambda(x_0, \ldots, x_n),$$

so ist nach Satz 11 $\prod G_\lambda(f_0, \ldots, f_n) = 0$; also verschwindet wenigstens einer der Faktoren, etwa

$$G_1(f_0, \ldots, f_n) = 0. \tag{47}$$

Wir setzen $Q = G_1 H$ (also $H = G_2 \ldots G_r$):

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = G_1(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, H(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Läßt man nun $x_1, \ldots, x_n$ als Unbestimmte und spezialisiert x_0 zu x_0' so, daß

$$H(x_0', x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{48}$$

ist [16]), so ist auch $Q(x_0', x_1, \ldots, x_n) = 0$, und folglich gibt es nach Satz 11 ein Größensystem $\varrho_1', \ldots, \varrho_n'$ derart, daß

$$x_0' = f_0(\varrho_1', \ldots, \varrho_n'),$$
$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist [17]). Nach (47) ist daher

$$G_1(x_0', x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{49}$$

Aus (48) folgt also allemal (49). Daher muß eine Potenz von $G_1(x_0, \ldots, x_n)$, als Polynom von x_0 allein betrachtet, teilbar sein durch $H(x_0, \ldots, x_n)$. Aber in Q hat das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten; die Teiler G_1 und H haben daher dieselbe Eigenschaft, und aus Algebra, Satz 72 folgt dann, daß die genannte Potenz von G_1 auch als Polynom aller x_i durch H teilbar ist. Die irreduziblen Faktoren von H, d. h. die Polynome $G_2, \ldots, G_r$ sind daher sämtlich mit G_1 äquivalent. Somit ist $Q = c G_1^r$, wo c eine Konstante. W. z. b. w.

---

[16]) Das ist möglich, weil in Q und folglich auch in dem Teiler H das von $x_1, \ldots, x_n$ freie Glied einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, so daß x_0 in H wirklich vorkommt.

[17]) Man beachte, daß ja $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte sind, so daß der am Schluß von Satz 11 erwähnte Ausnahmefall gewiß nicht vorliegt.

§ 8.

Anwendung auf rationale Flächen.

Satz 13. *Wenn zwischen den $n+1$ homogenen Polynomen m-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\ f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n),\ \ldots,\ f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

eine homogene Abhängigkeit von irgendeinem Grad N besteht, bei der das Glied mit f_0^N einen von 0 verschiedenen Koeffizienten hat, und wenn speziell die letzten n Polynome genau qm gemeinsame Nullstellen haben[18]*, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so liegen die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n),$$

falls $q < m^{n-1}$ ist[19]*, auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich $m^{n-1} - q$ oder ein Teiler davon ist. Und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche, deren Ordnung gleich q ist.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze 11 und 12. Ausdrücklich sei wieder bemerkt, der Satz besagt nicht, daß die einzelnen Flächenpunkte sich etwa nur auf *eine* Art in der Parameterform darstellen lassen.

Beispiel I (Beispiel III von S. 470 nach Umnumerierung der f_ν).

$$f_0 = \varrho_1\varrho_2,\quad f_1 = \varrho_1^2,\quad f_2 = \varrho_2^2,\quad f_3 = \varrho_1\varrho_3.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$; man findet ohne weiteres die Abhängigkeit zweiten Grades $f_0^2 - f_1 f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^2 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Eine Rechnung ähnlich der auf S. 478 bei Beispiel II ergibt

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= R\Big(\underset{\varrho_1,}{\varrho_1^2 - x_1\sigma^2},\quad \underset{\varrho_2,}{\varrho_2^2 - x_2\sigma^2},\quad \underset{\varrho_3,}{\varrho_1\varrho_3 - x_3\sigma^2},\quad \underset{\sigma}{\Sigma u_\nu \varrho_\nu - y\sigma}\Big) \\ &= u_3^4\{x_1^2 y^4 - 2\,x_1[(u_1x_1 + u_3x_3)^2 + u_2^2 x_1 x_2]\,y^2 + \\ &\quad + [(u_1x_1 + u_3x_3)^2 - u_2^2 x_1 x_2]^2\}; \end{aligned}$$

doch hätte es genügt, von der geschweiften Klammer das erste Glied zu berechnen. Es ist also

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = u_3^4, \qquad \Omega_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2.$$

Nach S. 484 ist Φ vom Grad $qm = 2q$, Ω_0 vom Grad q. Daher ist $q = 2$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 2 = 2$. In der Tat handelt es sich um den Kegel zweiter Ordnung $x_0^2 - x_1x_2 = 0$.

---

[18]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[19]) Hier gilt wieder das in Fußnote [14]) Gesagte.

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte des Kegels erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1^2 = 0$, also die Punkte der Mantellinie $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. In der Tat sieht man sofort, daß von dieser nur der eine Punkt 0, 0, 1, 0 erfaßt wird.

Beispiel II (Beispiel IV von S. 470 nach Umnumerierung der f_i).

$$f_0 = \varrho_1 \varrho_2, \quad f_1 = \varrho_1^2, \quad f_2 = \varrho_2 \varrho_3, \quad f_3 = \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2^2.$$

Hier ist wieder $n = 3$, $m = 2$; man findet leicht die Abhängigkeit dritten Grades $f_0^3 - f_0 f_1 f_3 + f_1^2 f_2 = 0$, bei der das Glied mit f_0^3 vorkommt. Die Polynome f_1, f_2, f_3 haben wieder nur die eine gemeinsame Nullstelle $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = 0$. Daher muß (was man auch bei Beispiel I hätte ausnutzen können) Φ von u_1 und u_2 frei sein [20]). Zur Berechnung von Φ und Ω_0 genügt es also, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen; sie sei T^*. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\left(\frac{\varrho_1^2 - x_1\sigma^2}{\varrho_1}, \frac{\varrho_2\varrho_3 - x_2\sigma^2}{\varrho_2}, \frac{\varrho_1\varrho_3 + \varrho_2^2 - x_3\sigma^2}{\varrho_3}, \frac{u_3\varrho_3 - y\sigma}{\sigma}\right)$$
$$= u_3^2[-x_1 y^6 + \cdots].$$

Es ist also $\Phi = u_3^2$, $\Omega_0 = -x_1$. Daher ist $q = 1$, die Ordnung der Fläche also ein Teiler von $2^2 - 1 = 3$. In der Tat handelt es sich um die Fläche dritter Ordnung

$$x_0^3 - x_0 x_1 x_3 + x_1^2 x_2 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$, also die Punkte der Geraden $x_1 = 0$, $x_0 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte erfaßt werden mit Ausnahme des einen Punktes 0, 0, 1, 0.

Beispiel III. $f_0 = \varrho_1^2 \varrho_2$, $f_1 = \varrho_1^3$, $f_2 = \varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3)$, $f_3 = (\varrho_1 + \varrho_2)\varrho_3^2$.

Hier ist $n = 3$, $m = 3$. Durch sukzessive Elimination findet man leicht die Abhängigkeit siebenten Grades

$$(f_0^3 - f_1^2 f_2)^2 (f_0 + f_1) - f_0^4 f_1^2 f_3 = 0,$$

bei der das Glied mit f_0^7 vorkommt. Aus gleichem Grunde wie beim vorigen Beispiel genügt es wieder, die Resultante T für $u_1 = u_2 = 0$ zu berechnen. Man findet

$$\mathsf{T}^* = R\left(\frac{\varrho_1^3 - x_1\sigma^3}{\varrho_1}, \frac{\varrho_2^2(\varrho_2 - \varrho_3) - x_2\sigma^3}{\varrho_2}, \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)\varrho_3^2 - x_3\sigma^3}{\varrho_3}, \frac{u_3\varrho_3 - y\sigma}{\sigma}\right)$$
$$= u_3^6[x_1^2 y^{21} + \cdots].$$

[20]) Φ ist ja das erste Produkt in Formel (25).

Es ist also $\Phi = u_3^6$, $\Omega_0 = x_1^2$. Daher ist $q = 2$ und die Ordnung der Fläche ein Teiler von $3^2 \cdot 2 = 7$. In der Tat handelt es sich um die Fläche siebenter Ordnung

$$(x_0^3 - x_1^2 x_2)^2 (x_0 + x_1) - x_0^4 x_1^2 x_3 = 0.$$

Durch die Parameterdarstellung werden nach Satz 11 alle Punkte der Fläche erfaßt außer allenfalls die Schnittpunkte mit $x_1 = 0$. Man sieht aber leicht, daß diesmal auch diese Punkte ausnahmslos erfaßt werden.

Bei Satz 13 ist unbequem, daß zwischen den f_ν eine homogene Abhängigkeit von einem gewissen Grad N bestehen muß, *in der das Glied mit f_0^N wirklich vorkommt*. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so kann ihr Erfülltsein stets durch eine lineare Transformation

$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{n} a_{\nu\mu} \varphi_\mu \qquad (\nu = 0, \ldots, n), \tag{50}$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{51}$$

erreicht werden (unter Umständen schon durch Umnumerieren der f_ν, siehe oben Beispiel I und II). Denn daß überhaupt eine homogene Abhängigkeit

$$\sum A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n} = 0 \qquad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N) \tag{52}$$

besteht, ist zu Beginn des § 2 gezeigt. Übt man hier die Transformation (50) aus, so entsteht zwischen den φ_ν die Abhängigkeit

$$\sum B_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} \varphi_0^{\lambda_0} \varphi_1^{\lambda_1} \ldots \varphi_n^{\lambda_n} = 0 \quad (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = N), \tag{53}$$

wobei insbesondere

$$B_{N0\ldots0} = \sum A_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n} a_{00}^{\lambda_0} a_{10}^{\lambda_1} \ldots a_{n0}^{\lambda_n} \tag{54}$$

ist. Nun kann man die $a_{\nu\mu}$ so wählen (nach Algebra, Satz 29 sogar als ganze Zahlen), daß

$$B_{N0\ldots0} \neq 0 \tag{55}$$

ist und daß zugleich die Bedingung (51) erfüllt ist. Dann hat man das Gewünschte.

Haben nun die $n+1$ Polynome $f_0, \ldots, f_n$ nur endlich viele gemeinsame Nullstellen, so haben die n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, da man die Gleichungen (50) nach den φ_ν auflösen kann, ebenfalls diese Nullstellen. Sie haben aber keine weiteren, also gewiß auch nur endlich viele. Denn wenn sie noch eine hätten, so hätte wegen (53) und (55) auch φ_0 diese Nullstelle, die dann nach (50) auch eine weitere gemeinsame Nullstelle aller f_ν wäre. Jetzt lassen sich die Sätze 11 und 12 auf die Polynome φ_ν anwenden. Dabei ist aber die Berechnung von Φ

und Ω_0, wie schon die obigen Beispiele zeigen, eine mühsame Sache. Unter Verzicht darauf kann man aber aus Satz 13 nach Rückkehr zu den Polynomen f_ν immerhin das folgende weniger präzise Resultat entnehmen:

Satz 14. *Die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

liegen, wenn die f_ν homogene Polynome m-ten Grades mit s verschiedenen gemeinsamen Nullstellen sind [21]*, und wenn $s < m^{n-1}$* ist [22]*, im allgemeinen auf einer nicht zerfallenden algebraischen Fläche, deren Ordnung höchstens gleich $m^{n-1} - s$ ist; und zwar enthält das Gebilde alle Punkte dieser Fläche außer allenfalls die Schnittpunkte mit einer zweiten (möglicherweise zerfallenden) algebraischen Fläche. — Ausnahmsweise kann es sich aber auch um ein Gebilde von weniger als $n-1$ Dimensionen handeln.*

Nach Fußnote [22]) ist nämlich $s \leqq q$, also $m^{n-1} - q \leqq m^{n-1} - s$. — Der Ausnahmefall liegt vor für $q = m^{n-1}$ (siehe § 9).

Beispiel. $f_0 = p_1 p_2$, $f_1 = p_1 p_3$, $f_2 = p_2 p_4$, $f_3 = p_3 p_4$.

Die p_ν seien ein System linearer Formen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ derart, daß $\frac{p_4}{p_1}$ und $\frac{p_3}{p_2}$ nicht konstant sind. Hier gibt es im allgemeinen zwei verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

eine aus dem System $p_1 = 0$, $p_4 = 0$

und eine aus dem System $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Die Ordnung der Fläche ist also höchstens gleich $2^2 - 2 = 2$. In der Tat ist es die Fläche zweiter Ordnung $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$. — Der Ausnahmefall liegt vor, wenn die gemeinsame Nullstelle von p_1 und p_4 mit der von p_2 und p_3 zusammenfällt, wenn also die Koeffizientenmatrix der vier Linearformen p_ν vom Rang 2 ist. Dann besteht zwischen den f_ν auch noch eine lineare Relation, und das Gebilde ist ein Kegelschnitt.

§ 9.

Der Fall $q = m^{n-1}$.

Nach § 6 ist stets $q \leqq m^{n-1}$, und wir haben bisher $q < m^{n-1}$ vorausgesetzt. Wenn nun $q = m^{n-1}$, also $p = m^n$ ist, so hat das Gleichungs-

[21]) Hier gilt wieder das in Fußnote [11]) Gesagte.

[22]) Von selbst ist stets $s \leqq m^{n-1}$. Denn die s verschiedenen Nullstellen der $n+1$ Polynome f_ν sind als Nullstellen der n Polynome $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ihrer Pseudomultiplizität entsprechend zu zählen, und da eine Pseudomultiplizität nach Satz 10 durch m teilbar, also mindestens gleich m ist, so liefern sie mindestens ms gemeinsame Nullstellen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Da wir die genaue Anzahl dieser Nullstellen mit qm bezeichnet haben, so ist $s \leqq q$, wegen $q \leqq m^{n-1}$ also auch $s \leqq m^{n-1}$. Der Fall $s = m^{n-1}$ wird in § 9 erledigt.

system (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, gar keine Lösung mit $\sigma \neq 0$; denn die Anzahl dieser Lösungen war ja gleich $m^n - p$. Das besagt dann, daß das inhomogene Gleichungssystem

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_1, \quad \ldots, \quad f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) = x_n \tag{56}$$

keine Lösung hat. Daraus läßt sich aber schließen, daß die Funktionaldeterminante der f_ν identisch verschwindet. Denn wenn sie etwa für das Spezialsystem $\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0$ nicht verschwände, so könnte man den zugrunde gelegten Körper so erweitern, daß das Gleichungssystem (56), wo die x_ν Unbestimmte sind, auflösbar wird. Eine Lösung wäre nämlich vorhanden in dem zu seinem Quotientenkörper erweiterbaren Ring der formalen Potenzreihen nach Potenzen der Größen

$$y_1 = x_1 - f_1(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0), \quad \ldots, \quad y_n = x_n - f_n(\varrho_1^0, \ldots, \varrho_n^0),$$

die ja zugleich mit $x_1, \ldots, x_n$ den Charakter von Unbestimmten haben; das zeigt man genau wie in der Funktionentheorie, wobei nur die Konvergenzbetrachtungen wegfallen. Nachdem somit das Verschwinden der Funktionaldeterminante feststeht, ergibt sich aus Algebra, Satz 61, daß zwischen den f_ν eine Abhängigkeit besteht, und wie zu Beginn des § 2 sieht man dann, daß sogar eine *homogene* Abhängigkeit besteht. Somit gewinnen wir als Ergänzung der Sätze 11 und 13 den

Satz 15. *Wenn die n homogenen Polynome m-ten Grades*

$$f_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^n gemeinsame Nullstellen haben, wobei jede ihrer (stets durch m teilbaren) Pseudomultiplizität entsprechend gezählt ist, so besteht zwischen den n Polynomen (mindestens) eine homogene Abhängigkeit $G(f_1, \ldots, f_n) = 0$ [23]).

Liegen jetzt $n+1$ homogene Polynome m-ten Grades

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

mit genau m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen vor, so gehen wir wie in der zweiten Hälfte des § 8 durch eine lineare Transformation zu $n+1$ neuen Polynomen

$$\varphi_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, \varphi_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

über, zwischen denen eine homogene Abhängigkeit etwa N-ten Grades besteht, bei der das Glied mit φ_0^N wirklich vorkommt. Aber die letzten n Polynome φ_ν

[23]) Man beachte, daß bei weniger als m^n gemeinsamen Nullstellen keine solche Abhängigkeit besteht. Dann haben nämlich die Gleichungen (22), wo die x_ν Unbestimmte sind, eine Lösung mit $\sigma \neq 0$, also auch mit $\sigma = 1$; d. h. die Gleichungen (56) sind lösbar. Zwischen den f_i kann daher keine Abhängigkeit bestehen, weil sonst dieselbe Abhängigkeit auch zwischen den Unbestimmten x_ν bestehen würde.

haben auch genau dieselben m^{n-1} gemeinsamen Nullstellen (Beweis wie in § 8), so daß bereits zwischen ihnen nach Satz 15 eine homogene Abhängigkeit besteht [24]). Kehrt man zu den ursprünglichen Polynomen f_ν zurück, so ergibt sich als Ergänzung zu Satz 14 der

Satz 16. *Wenn die* $n+1$ *homogenen Polynome* m*-ten Grades*

$$f_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_n), \ldots, f_n(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$$

genau m^{n-1} *verschiedene gemeinsame Nullstellen haben, dann gehören die Punkte des rationalen Gebildes*

$$x_\nu = f_\nu(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n)$$

dem Durchschnitt von mindestens zwei verschiedenen algebraischen Flächen an. Das Gebilde ist also höchstens $(n-2)$*-dimensional.*

Beispiel. $x_0 = \varrho_1^2 - \varrho_2^2$, $x_1 = \varrho_2^2 - \varrho_3^2$, $x_2 = \varrho_3^2 - \varrho_1^2$,

$$x_3 = \varrho_1^2 - 2\,\varrho_2^2 + \varrho_3^2.$$

Hier ist $n = 3$, $m = 2$ und die Polynome haben genau $2^2 = 4$ verschiedene gemeinsame Nullstellen, nämlich

$$\varrho_2 = \pm\,\varrho_1, \quad \varrho_3 = \pm\,\varrho_1$$

mit allen vier Vorzeichenkombinationen. Das Gebilde ist keine Fläche, sondern die Kurve (Gerade)

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0, \quad x_0 - x_1 - x_3 = 0.$$

Jeder Punkt der Geraden läßt sich auf unendlich viele Arten in der Parameterform darstellen.

§ 10.

Beweis eines in § 6 benutzten Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein homogenes Polynom vom Grad* km

$$\sum a_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} u_1^{\lambda_1} \ldots u_n^{\lambda_n} \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = km)$$

die m*-te Potenz eines Polynoms ist, besteht darin, daß seine Koeffizienten einem System von Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten genügen.*

[24]) Die m^{n-1} verschiedenen gemeinsamen Nullstellen der f_ν liefern nämlich, wie sich aus Fußnote [22]) ergibt, m^n gemeinsame Nullstellen der n Polynome $q_1, \ldots, q_n$, so daß man Satz 15 anwenden kann.

Beweis. Setzt man das Polynom versuchsweise gleich

$$(\text{I}) \qquad (\Sigma\, b_{\nu_1 \dots \nu_n} u_1^{\nu_1} \dots u_n^{\nu_n})^m \qquad (\nu_1 + \dots + \nu_n = k),$$

so ist

$$(\text{II}) \qquad a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \Sigma\, b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1m} \dots \nu_{nm}},$$

wobei die Summe sich über alle Systeme von Indizes erstreckt, für die

$$\begin{aligned} \nu_{11} + \nu_{12} + \dots + \nu_{1m} &= \lambda_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \nu_{n1} + \nu_{n2} + \dots + \nu_{nm} &= \lambda_n \end{aligned}$$

ist. Gesucht sind also die Bedingungen, unter denen das System (II) mit den Unbekannten $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$ eine Lösung hat. Betrachtet man statt dessen das homogene Gleichungssystem

$$(\text{III}) \qquad a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} c^m = \Sigma\, b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1m} \dots \nu_{nm}}$$

mit den Unbekannten c und $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Lösung das Verschwinden eines Resultantensystems. Ist die Bedingung erfüllt, so ist bei einer nichttrivialen Lösung gewiß $c \neq 0$, so daß man $c = 1$ setzen kann, womit auch das System (I) gelöst ist. Denn wenn $c = 0$ wäre, so würde aus (III) folgen:

$$\Sigma\, b_{\nu_{11} \dots \nu_{n1}} b_{\nu_{12} \dots \nu_{n2}} \dots b_{\nu_{1n} \dots \nu_{nm}} = 0,$$

was aber besagen würde, daß die m-te Potenz (I) und also auch das Basispolynom identisch verschwände. Daher wären auch alle $b_{\nu_1 \dots \nu_n}$ gleich 0, und die Lösung von (III) wäre die triviale.

Nach Algebra, Satz 139 gibt es ein Resultantensystem, das aus Polynomen der $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Mai 1942.)

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für Doppelreihen.

Von

Ludwig Neder in Münster i. W.

Unter den nach Cauchys Definition konvergent genannten Doppelreihen

$$\sum a_{\mu,\nu} \qquad (\mu \text{ und } \nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

besitzen diejenigen mit ausnahmslos konvergenten Zeilen und Spalten eine Reihe von Eigenschaften, durch die sie vor den übrigen Reihen ausgezeichnet sind, und durch die sie den berechtigten Erwartungen entsprechen, die man einer sinnvollen Verallgemeinerung der eindimensionalen konvergenten Reihen entgegenbringt. Von solchen Eigenschaften erwähnen wir hier nur die folgenden: a) Die Teilsummen

$$s_{m,n} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu,\nu} \qquad (m \text{ und } n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

bilden eine beschränkte Zahlenmenge. b) Desgleichen die Glieder $a_{\mu,\nu}$ der Doppelreihe. c) Jede durch Weglassung von je höchstens endlich vielen Anfangszeilen und -spalten erzeugte Teilreihe konvergiert (samt allen Zeilen und Spalten). d) Die iterierten Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\} \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\}$$

konvergieren, und zwar gegen die Summe s der Doppelreihe.

Zweck dieser kurzen Note ist es nun, eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben dafür, daß eine Doppelreihe zur obengenannten Teilklasse der nach Cauchy konvergenten Doppelreihen gehört:

Satz. *Damit eine Doppelreihe* (1) *konvergent ist samt allen ihren Zeilen und Spalten, ist notwendig und hinreichend, daß für die Teilsumme* (2) *eine Entwicklung besteht*

$$s_{m,n} = s - \varphi_m - \psi_n + \chi_{m,n}, \tag{3}$$

wobei

$$\varphi_m \to 0 \text{ bei } m \to \infty, \quad \psi_n \to 0 \text{ bei } n \to \infty, \quad \chi_{m,n} \to 0 \text{ bei } m + n \to \infty. \tag{4}$$

Beweis. A. *Die Bedingung ist hinreichend.* Aus (3) und (4) folgt, daß $s_{m,n}$ einem wohlbestimmten Grenzwert zustrebt, wenn $m \to \infty$, $n \to \infty$ bzw. wenn $m \to \infty$, n fest oder m fest, $n \to \infty$. Und dies liefert gerade die Konvergenz der Doppelreihe (nach Cauchy) bzw. die Konvergenz der Zeilen und Spalten.

B. *Die Bedingung ist notwendig.* Restkern heiße der Ausdruck

$$r_{m,n} = \sum a_{\mu,\nu} \qquad (\mu > m,\ \nu > n).$$

Dann haben wir zunächst die Zerlegung

$$\sum_{\mu=m+1}^{M} \sum_{\nu=n+1}^{N} a_{\mu,\nu} = s_{M,N} + s_{m,n} - s_{m,N} - s_{M,n}, \tag{5}$$

aus der sich bei $M \to \infty$, $N \to \infty$ ergibt

$$r_{m,n} = s + s_{m,n} - s_{m,\infty} - s_{\infty,n} = s + s_{m,n} - (s - r_{m,0}) - (s - r_{0,n}).$$

Daraus resultiert

$$s_{m,n} = s - r_{m,0} - r_{0,n} + r_{m,n},$$

womit die gewünschte Entwicklung (3) gefunden ist, und auch (4) besteht, sobald die Beziehung

$$r_{m,n} \to 0 \text{ bei } m + n \to \infty \tag{6}$$

sichergestellt ist, was nunmehr erfolgen soll.

Dazu haben wir zunächst wegen der vorausgesetzten Konvergenz (nach Cauchy) der Doppelreihe

$$|s - s_{m,n}| < \delta \quad \text{für} \quad m \geqq P,\ n \geqq P.$$

Setzen wir also in (5) voraus

$$M \geqq m \geqq P, \quad N \geqq n \geqq P,$$

und subtrahieren wir in (5) von jeder der vier Teilsummen einmal s (was sich im Effekt gegenseitig aufhebt), so kommt nach dem Grenzübergang $M \to \infty$, $N \to \infty$ die Beziehung

$$|r_{m,n}| < 4\,\delta \quad \text{für} \quad m \geqq P,\ n \geqq P. \tag{7}$$

Weiter ist wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Zeilen und Spalten

$$\begin{cases} \left| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right| < \frac{\delta}{P} & \text{für } m \geqq M_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, P), \\ \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right| < \frac{\delta}{P} & \text{für } n \geqq N_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, P), \end{cases} \tag{8}$$

Wenn wir dann setzen

$$Q = \max\,(P, M_1, \ldots, M_P, N_1, \ldots, N_P),$$

so ergibt sich jetzt die Beziehung

$$|r_{m,n}| < 5\,\delta \text{ für } m \geqq Q \text{ (und entsprechend auch für } n \geqq Q)$$

folgendermaßen: Für $n \geqq P$ ist sie in (7) enthalten, und für $n = 0, 1, \ldots, P-1$ gilt

$$r_{m,n} = r_{m,P} + \sum_{\nu=n+1}^{P} \left\{ \sum_{\mu=m+1}^{\infty} a_{\mu,\nu} \right\},$$

so daß die Behauptung aus (7) und (8) folgt.

Nunmehr aber gilt

$$|r_{m,n}| < 5\,\delta \quad \text{für} \quad m+n \geqq 2\,Q,$$

da dann $m \geqq Q$ oder $n \geqq Q$, womit (6) und somit alles bewiesen ist.

Schlußbemerkung. Die Übertragung unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung auf drei- und mehrfach unendliche Reihen dürfte von geringerem Interesse sein.

(Eingegangen am 31. März 1942.)

Zu einem Approximationssatz von Koksma.

Von

L. Rédei in Szeged (Ungarn).

Herr Koksma[1]) hat folgenden Satz bewiesen: Für fast alle reellen Zahlen $\alpha \geqq 1$ ist die Folge α^x ($x = 1, 2, \ldots$) gleichverteilt (mod 1).

Trivial ist der Fall, daß α ganz rational ist. Hiervon abgesehen wurde meines Wissens das Verhalten von α^x (mod 1) bisher für kein spezielles α angegeben. Im folgenden soll ein kleiner Beitrag zu dieser Frage geliefert werden.

Es werde ω eine Häufungsstelle (mod 1) einer Folge a_x genannt, wenn es ganz rationale Zahlen g_x gibt so, daß ω eine (gewöhnliche) Häufungsstelle von $a_x + g_x$ ist. Dann sind alle $\omega + g$ (g ganz rational) auch Häufungsstellen (mod 1), die wir äquivalent nennen. Gibt es keine weiteren Häufungsstellen (mod 1) und ist ω eine beliebige unter ihnen, so sagen wir, daß a_x gegen ω konvergiert (mod 1). Wir beweisen:

a. *Ist α ganz algebraisch und sind die von α verschiedenen Konjugierten von α absolut kleiner als* 1[2]), *so konvergiert α^x gegen* 0 (mod 1).

b. *Ist $\alpha = \frac{a}{b}$ (a, b ganz rational, $a > b > 1$, $b \nmid a$), so hat α^x unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen* (mod 1). *Ist ω eine unter ihnen, so ist mit einem passenden ganz rationalen r auch $\alpha\,\omega + \frac{r}{b}$ eine solche. [Ob aber die Häufungsstellen* (mod 1) *überall dicht oder sogar gleichverteilt liegen, bleibt dahingestellt.]*

Zu a. Die über alle Konjugierten erstreckte Summe $\Sigma\, \alpha^x$ ist für jedes x ganz rational. Hieraus folgt schon die Behauptung.

---

[1]) J. F. Koksma, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. Compositio math. **2** (1935), S. 250—258. Vgl. auch den Bericht desselben Verfassers: Diophantische Approximationen. Ergebnisse der Math. **4**, Heft 4, Berlin 1936, S. 1—157, insbes. S. 95.

[2]) Offenbar muß ein solches α absolut größer als 1, also auch reell sein. Zu jeder Gradzahl lassen sich unendlich viele solche α leicht angeben. Vgl. z. B. St. Lipka, Über die Irreduzibilität von Polynomen. Math. Annalen **118** (1941), S. 235—245.

Zu **b.** Wir beweisen zuerst die zweite Behauptung. Es sei ε eine vorgegebene positive Zahl. Nach der Annahme gibt es dann unendlich viele natürliche Zahlen x so, daß

$$\alpha^{x-1} = \omega + g_x + \delta_x$$

mit ganz rationalem g_x und $|\delta_x| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$. Hieraus folgt

$$\alpha^x \equiv \alpha\,\omega + \frac{r}{b} + \alpha\delta_x \pmod 1$$

mit einem passenden $r = 0, 1, \ldots, b-1$. Da $|\alpha\delta_x| < \varepsilon$ ist und für r bloß ein endlicher Wertevorrat vorliegt, erhellt die Richtigkeit der zweiten Behauptung in **b.**

Kommt in **b** ein irrationales ω vor, so ergibt sich die erste Behauptung in **b** durch Iteration des eben Bewiesenen. Für alle Fälle gilt aber folgender Beweis. Neben allen ω betrachten wir auch noch diejenigen Zahlen $\overline{\omega} = \alpha\,\omega$, die unter den ω nicht vorkommen (natürlich können die $\overline{\omega}$ auch fehlen) und bezeichnen mit H die Menge der ω und $\overline{\omega}$. Nehmen wir jetzt an, daß die erste Behauptung in **b** falsch ist. Das bedeutet, daß die ω endlichviele Restklassen (mod 1) ausmachen; so besteht H offenbar aus ebenfalls endlichvielen Restklassen (mod 1), da ja α rational ist. Somit können wir um jedes Element ξ von H als Mittelpunkt ein Intervall $J(\xi)$ der Länge 2ε legen, wobei $\varepsilon(>0)$ genügend klein gewählt ist, so daß alle diese $J(\xi)$ paarweise fremd sind. Sodann konstruieren wir ähnlich zu den ω weitere Intervalle $J'(\omega)$ der Länge $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$ statt 2ε. [$J'(\omega)$ ist in $J(\omega)$ enthalten.] Jetzt wählen wir eine natürliche Zahl N so groß, daß α^x für $x = N, N+1, \ldots$ in die Vereinigungsmenge aller $J'(\omega)$ fällt. Dadurch wird jedem $x = N, N+1, \ldots$ ein bestimmtes $\omega = \omega_x$ zugeordnet mit

$$\alpha^x = \omega_x + \delta_x \quad \text{und} \quad |\delta_x| \leqq \frac{\varepsilon}{\alpha}. \tag{1}$$

Da

$$\alpha^{x+1} = \alpha\,\omega_x + \alpha\delta_x$$

und $|\alpha\delta_x| \leqq \varepsilon$ ist, so liegt α^{x+1} in $J(\alpha\,\omega_x)$. Letzteres muß also ein $J'(\omega)$ enthalten, und das heißt, daß $\alpha\,\omega_x$ einem ω gleich ist. Da (1) auch mit $x+1$ statt x gilt, so muß eben $\alpha\,\omega_x = \omega_{x+1}$ sein. Das hat wieder $\delta_{x+1} = \alpha\delta_x$ zur Folge. Also ist $\delta_{N+k} = \alpha^k\delta_N$ $(k = 1, 2, \ldots)$, und das ergibt wegen (1) und $\alpha > 1$: $\delta_x = 0$, $\alpha^x = \omega_x$ $(x = N, N+1, \ldots)$. Da aber alle α^x inkongruent sind (mod 1)[3]), so bedeutet letzteres unendlich viele nicht äquivalente Häufungsstellen von α^x (mod 1). Dieser Widerspruch beweist **b.**

[3]) Sie haben sogar verschiedene reduzierte Nenner.

Bemerkung. Ein bekannter Satz von WEYL[4]) lautet so: Sind je zwei der ganzen rationalen Zahlen a_x ($x = 1, 2, \ldots$) voneinander verschieden, so ist für fast alle reellen γ die Folge γa_x gleichverteilt (mod 1). Offenbar gilt dieser Satz auch dann, wenn a_x durch $a_x + \delta_x$ ersetzt wird, wobei δ_x eine reelle Nullfolge ist, insbesondere also für α^x statt a_x mit einem α aus $\mathbf{a}$. Ist γ aus dem durch α erzeugten Zahlkörper, so hat $\gamma\,\alpha^x$ nur endlichviele nicht äquivalente Häufungsstellen (mod 1), wie das aus $\mathbf{a}$ leicht folgt.

[4]) H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. Math. Annalen **77** (1916), S. 313—352, insbes. S. 344. Vgl. auch den unter Anm. [1]) zitierten Bericht, S. 94.

(Eingegangen am 2. Mai 1942.)

Konstruktion lösender Kerne für singuläre Integralgleichungen erster Art, insbesondere bei Differenzkern.

Von

M. Eichler in Darmstadt.

Aufgabestellung.

1. Den nachstehenden Ausführungen liegt eine Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

von erster Art zugrunde. Der Kern möge die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} L(x, \xi) = {} & \frac{1}{x - \xi} + c_0'(x) \left(\gamma_0(\xi) + \mathfrak{I}_0(x - \xi)\right) \\ & + c_1(x) \left(\frac{1}{1!} x \gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \mathfrak{I}_1(x - \xi)\right) \\ & + \cdots \\ & + c_n(x) \left(\frac{1}{1!} x^n \gamma_0(\xi) + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \gamma_1(\xi) + \cdots \right. \\ & \qquad \left. + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{I}_n(x - \xi)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

haben, wobei $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_0(x) &= \ln |x|, \\ \mathfrak{I}_n(x) &= \int_0^x \mathfrak{I}_{n-1}(x)\, dx, \end{aligned} \tag{3}$$

also

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1(x) &= x(\ln |x| - 1), \\ \mathfrak{I}_2(x) &= \tfrac{1}{2} x^2 \ln |x| - \tfrac{3}{4} x^2, \\ \mathfrak{I}_3(x) &= \tfrac{1}{6} x^3 \ln |x| - \tfrac{11}{36} x^3, \text{ usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

Die Besonderheit des Kerns, auf die sich alle Rechnungen stützen, ist die, daß die einzelnen Terme in (2) bis auf die Faktoren $c_\nu(x)$ auseinander durch Ableitung nach x hervorgehen.

$L(x, \xi)$ ist für $x = \xi$ singulär, und es ist in dem Integral (1) der Cauchysche Hauptwert zu nehmen. Es wird verabredet, daß Integrale mit singulärem Integranden stets im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen sind.

Integralgleichungen dieser Art, wenn auch mit einer unendlichen Reihe (2), kommen in der Tragflügeltheorie oder bei gewissen Randwertaufgaben für

die geschlitzte Ebene und die Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$ vor. Als Kern tritt im letzteren Fall die HANKELsche Funktion $H_1^{(2)}(x - \xi)$ auf, die sich in eine gut konvergente Reihe (2) entwickeln läßt (vgl. hierzu den Abschnitt 12). Auf die dem Praktiker naheliegende Vermutung, daß man beim Lösen der Integralgleichung die unendliche Reihe durch einen endlichen Abschnitt ersetzen darf, wird hier nicht eingegangen.

Gesucht und konstruiert werden für eine endliche Reihe (2) zwei Funktionen $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$, $\mathsf{N}(\xi)$ von der Art, daß

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \mathsf{\Lambda}(\xi, t)\, f(t)\, dt \tag{5}$$

die Integralgleichung (1) löst, während $\mathsf{N}(\xi)$ der zugehörigen homogenen Gleichung

$$0 = \int_{-1}^{+1} L(x, \xi)\, \mathsf{N}(\xi)\, d\xi \tag{6}$$

genügt. Es ist demnach $\mathsf{\Lambda}(\xi, t) + \mathsf{N}(\xi)\, \varphi_0(t)$ mit beliebigem $\varphi_0(t)$ ein lösender Kern der vorgelegten Integralgleichung. Die Konstruktion wird auf die Auflösung eines Systems von $n + 1$ linearen Gleichungen zurückgeführt, deren Lösbarkeit für die Durchführbarkeit der Berechnung von $\mathsf{\Lambda}$ und N maßgebend ist; in Ausnahmefällen versagt sie.

Die Konstruktion von $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$ und $\mathsf{N}(\xi)$ läßt sich für Differenzkerne der Form (2) weitgehend explizit leisten, wie zum Schluß gezeigt wird (Abschnitt 12 bis 14).

Ersetzt man in (2) die $c_\nu(x)$, $\gamma_\nu(\xi)$ durch $p^{\nu+1} c_\nu(x)$, $p^{-\nu-1}\gamma_\nu(\xi)$ und läßt den Parameter p gegen 0 streben, so geht (2) in einen von logarithmischen Bestandteilen freien Kern

$$L^*(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + c_0(x)\gamma_0(\xi) + \cdots + c_n(x)\gamma_n(\xi)$$

über. Hierbei strebt auch $\mathsf{\Lambda}(\xi, t)$ einer Grenzfunktion $\mathsf{\Lambda}^*(\xi, t)$ zu, welche gleich dem zu L^* gehörigen lösenden Kern ist[1]). Obwohl man die Tatsache, daß $\mathsf{\Lambda}^*$ der lösende Kern von L^* ist, sehr leicht direkt verifizieren könnte, dürfte es doch interessant sein, die Entstehung von $\mathsf{\Lambda}^*$ aus $\mathsf{\Lambda}$ im einzelnen zu verfolgen. Diese Entartungsfälle von (2) sind wohl im allgemeinen von größerem Interesse als die nicht entarteten Fälle. Denn man kann jeden Kern

$$\widetilde{L}(x, \xi) = \frac{1}{x - \xi} + \widetilde{L}_1(x, \xi)$$

[1]) Man wird so auf ein Lösungsverfahren geführt für Integralgleichungen 1. Art mit einem Kern L^*, das mit dem Abspaltungsverfahren von E. SCHMIDT bei Integralgleichungen 2. Art (je nach der Auffassung) analog oder identisch ist.

mit stetigem und stückweise glattem $\widetilde{L}_1$ durch Kerne L^* gleichmäßig approximieren und nach unserem Ergebnis auch mit wenig Mühe eine Integralgleichung 1. Art mit diesem Kern angenähert lösen, falls es zutrifft, daß die Lösung der Integralgleichung mit dem Kern L^* bei wachsendem n gegen diejenige mit dem Kern $\widetilde{L}$ konvergiert. Diese Frage wird hier jedoch nicht behandelt. Außerdem führt die Betrachtung entarteter Kerne auf ein Iterationsverfahren zur Lösung von (1) (vgl. Abschnitt 16).

Alle im folgenden auftretenden Funktionen sollen, soweit etwas anderes nicht ausdrücklich bemerkt wird, im Intervall von -1 bis $+1$ stetig differenzierbar sein. An vielen Stellen könnte man zwar mit schwächeren Voraussetzungen auskommen, jedoch soll uns hier in erster Linie die Aufstellung eines zur Lösung von (1) führenden Formelapparates, nicht die Absteckung seiner Gültigkeitsgrenzen interessieren. Treten auch Ableitungen von Funktionen auf, so sollen sie wieder als stetig differenzierbar vorausgesetzt werden.

Beschreibung des Konstruktionsverfahrens.

2. Es werde

$$(7) \qquad g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{n!} x^n \gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_n(\xi) + \mathfrak{R}_n(x-\xi) \right) \varphi(\xi)\, d\xi$$

gesetzt. Es ist dann

$$(8) \qquad \frac{d^\mu}{dx^\mu} g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{1}{(n-\mu)!} x^{n-\mu} \gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{R}_{n-\mu}(x-\xi) \Big) \varphi(\xi)\, d\xi$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ und

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \ln|\varepsilon| \left(\varphi(x-\varepsilon) - \varphi(x+\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+1} \right) \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}\, d\xi,$$

bei differenzierbarem φ also

$$(9) \qquad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{d-\xi}\, d\xi.$$

Nach (7), (8), (9) einerseits, nach (1), (2) andererseits genügt $g(x)$ der linearen Differentialgleichung

$$(10) \qquad \mathfrak{L}[g(x)] = g^{(n+1)}(x) + c_0(x) g^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x) g(x) = f(x).$$

Bekanntlich genügt dann $g(x)$ auch einer Integralgleichung

$$g(x) = \int_{-1}^{+1} G(x,t)\, f(t)\, dt \tag{11}$$

mit einer Greenschen Funktion $G(x,t)$.

Man kennt nun die Lösungen der Integralgleichung (9)[2]), es sind dies die Funktionen

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, \frac{g^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx + \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{12}$$

mit einer beliebigen Konstanten φ_0. Differenziert man (11) $(n+1)$-mal nach x und trägt das Ergebnis in (12) ein, so erhält man einen Ausdruck der Form (5). Dieser Grundgedanke ist nun im einzelnen durchzuführen.

Grundeigenschaften der Greenschen Funktion.

3. $G(x,t)$ genügt als Funktion von x der homogenen Differentialgleichung (10); sie ist samt ihren partiellen Ableitungen nach x bis zur $(n-1)$-ten Ordnung stetig, die n-te Ableitung macht an der Stelle $x = t$ einen Sprung von der Höhe -1, und von dieser Stelle abgesehen sind auch die n-te und $(n+1)$-te Ableitung stetig. Es ist demnach, wenn $h_0(x), \ldots, h_n(x)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung (10) bezeichnet,

$$G(x,t) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x) r_\nu(t) + \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(x)\, s_\nu(t) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(\mu)}(t)\, s_\nu(t) = 0 \quad \text{für } n > 0 \text{ und } \mu = 0, \ldots, n-1 \\ &\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n)}(t)\, s_\nu(t) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Aus diesen linearen Gleichungen lassen sich die $s_\nu(t)$ in eindeutiger Weise bestimmen, da die Determinante des Gleichungssystems die Wronskische Determinante der $h_\nu(t)$ ist und demnach nicht verschwindet. Die Bestimmung der $r_\nu(t)$ ist weniger einfach und enthält den wesentlichen Teil der zu leistenden Konstruktionsarbeit.

[2]) Vgl. etwa Fuchs-Hopf-Seewald, Aerodynamik. Berlin 1935. Bd. 2, Kap. III, § 7. Ferner K. Schröder, Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie. Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1938, XXX. H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung ... Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 245.

Wie jedoch die $r_\nu(t)$ auch ausfallen, ist (11) eine Lösung der Differentialgleichung (10), man erhält nämlich durch Ableitung von (11) nach x

$$\frac{d^\mu}{d\,x^\mu}\,g(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^\mu}{\partial\,x^\mu} G(x,t)\,f(t)\,dt, \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n) \tag{15}$$

$$\frac{d^{n+1}}{d\,x^{n+1}}\,g(x) = f(x) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial\,x^{n+1}} G(x,t)\,f(t)\,dt. \tag{16}$$

Multipliziert man die einzelnen Ableitungen von $g(x)$ mit den $c_\mu(x)$ und summiert, so entsteht (10).

Ansatz für den lösenden Kern der Integralgleichung.

4. Es wird nun in Verfolgung des in 2. geschilderten Programms der lösende Kern

$$\Lambda(\xi,t) + \varphi_0(t)\,\mathsf{N}(\xi) = \varphi(\xi,t)$$

in der Form

$$\varphi(\xi,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial\,x^{n+1}}\,G(x,t)\,\frac{d\,x}{x-\xi} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{17}$$

angesetzt, wobei $\varphi_0(\xi)$ eine willkürliche Funktion ist. Dies ist wirklich ein lösender Kern von (1), falls die Gleichungen

$$\frac{\partial^\mu}{\partial\,x^\mu} G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\,\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{I}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \tag{18}$$

für $\mu = 0, 1, \ldots, n$ bestehen. Zum Beweise multiplizieren wir (17) mit $f(t)$ und integrieren über t; es entsteht nach (16) bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die noch zu rechtfertigen ist,

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi,t)\,f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{g^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,d\,x + \frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}$$

mit

$$\varphi_0 = \int_{-1}^{+1} \varphi_0(t)\,f(t)\,dt,$$

und hieraus die Formel (9).

Aus (15) und (18) ergibt sich in gleicher Weise, bei ebenfalls noch zu rechtfertigender Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die Formel (8). Aus (8) und (9) folgt aber (1) auf Grund von (10).

Beweis für die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge bei gewissen Integralen.

5. Es bleibt zunächst die Aufgabe, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in den Integralen

$$\mathfrak{J}_1 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{19}$$

und

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \Big(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\,\gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{J}_{n-\mu}(x-\xi)\Big)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n) \tag{20}$$

zu beweisen. Es ist

$$\mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta \to 0} \mathfrak{J}_{1\eta}$$

mit

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} f(t)\,dt \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi}.$$

Hier schreiben wir

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t) = \Big(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t) - \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}}\,G(\xi,t)\Big) + \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}}\,G(\xi,t),$$

entsprechend spaltet sich das Integral $\mathfrak{J}_{1\eta}$ in eine Summe zweier Integrale auf, deren erstes einen überall endlichen Integranden hat, während das zweite sich als Produkt eines Integrals über t und eines Integrals über x schreiben läßt. In beiden Integralen ist die Integrationsreihenfolge also vertauschbar, und es wird

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,F(x,\eta,\xi)\,\frac{dx}{x-\xi} \tag{21}$$

mit

$$F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t)\,f(t)\,dt.$$

Wegen der Beschränktheit des Integranden gilt nun erstens gleichmäßig in x und ξ

$$\lim_{\eta \to 0} F(x,\eta,\xi) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\,G(x,t)\,f(t)\,dt; \tag{22}$$

zweitens besitzt $F(x, \eta, \xi)$ eine partielle Ableitung nach x, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, \eta, \xi) = \int_{-1}^{\xi-\eta} + \int_{\xi+\eta}^{+1} \frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}} G(x, t) f(t)\, dt + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } |x-\xi| < \eta \\ f(x) \dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t) \Big|_{t=x+0}^{t=x-0} & \text{für } |x-\xi| > \eta \end{array} \right\}.$$

Hiernach existiert eine von x, ξ und η unabhängige Konstante C so, daß

$$\left| \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} \right| < C \tag{23}$$

ist. Schließlich existiert wegen (22) für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in x und ξ für $|x - \xi| > \varepsilon$ der Grenzwert

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi} = E(x, \xi) \tag{24}$$

und stellt eine über das ganze Intervall integrierbare Funktion von x dar.

Nach diesen Vorbereitungen kann endlich die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in (19) gezeigt werden.

Es ist nach (21)

$$\mathfrak{J}_{1\eta} = \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{F(x, \eta, \xi) - F(\xi, \eta, \xi)}{x - \xi}\, dx + F(\xi, \eta, \xi) \int_{1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x - \xi} + C_\eta(\varepsilon),$$

wobei $C_\eta(\varepsilon)$ nach (23) gleichmäßig in ξ und η mit ε gegen 0 strebt:

$$|C_\eta(\varepsilon)| < \varepsilon \cdot 2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, C.$$

Wegen der gleichmäßigen Existenz der Grenzwerte (22) und (24) gilt somit

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 = \lim_{\eta \to 0} \mathfrak{J}_{1\eta} &= \int_{-1}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, E(x, \xi)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x - \xi} \\ &\quad + \lim_{\eta \to 0} C_\eta(\varepsilon) \\ &= \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\, E(x, \xi)\, dx \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}} G(\xi, t) f(t)\, dt \cdot \int_{1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{dx}{x - \xi} + D(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei $D(\varepsilon)$ ebenso wie $C_{\nu}(\varepsilon)$ gleichmäßig in ξ gegen 0 strebt. $D(\varepsilon)$ muß aber nunmehr verschwinden, da alle übrigen Terme dieser Gleichung von ε nicht abhängen. Führt man hierin den Wert (24) von $E(x, \xi)$ unter Beachtung von (22) ein, so erhält man die Behauptung.

6. Einfacher läßt sich das Integral (20) behandeln. $\varphi(\xi, t)$ wird nach (17) durch seine 3 Summanden ersetzt. Für den letzten ist nichts zu beweisen. Der erste Summand besitzt logarithmische Singularitäten für $\xi = t$, die von der Sprungstelle von $\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} G(x, t)$ herrühren, sowie an den Intervallenden schwache algebraische Singularitäten, die eine absolute Integrierbarkeit nicht verhindern. Für den ersten Summanden von $\varphi(\xi, t)$ ist also nichts mehr zu beweisen.

Es bleibt damit übrig, die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\, dt \int_{-1}^{+1} \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\, \gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{I}_{n-\mu}(x-\xi) \right) \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\, \frac{d\xi}{t-\xi}$$

zu beweisen. Wir ersetzen dazu $f(t) \cdot \sqrt{1-t^2}$ durch $f(t)$ und schreiben

$$\overline{f}(\xi) = \left(\frac{x^{n-\mu}}{(n-\mu)!}\, \gamma_0(\xi) + \cdots + \gamma_{n-\mu}(\xi) + \mathfrak{I}_{n-\mu}(x-\xi) \right) \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

haben also die Identität von

$$\mathfrak{J}_3 = \int_{-1}^{+1} f(t)\, dt \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{+1} \overline{f}(\xi)\, \frac{d\xi}{t-\xi}$$

mit

$$\mathfrak{J}_3^* = \int_{-1}^{+1} \overline{f}(\xi)\, d\xi \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} f(t)\, \frac{dt}{t-\xi}$$

nachzuweisen. Vor dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ist die Differenz beider Integrale von der Größenordnung $\varepsilon \ln \varepsilon \cdot f(t)\, \overline{f}(\xi)$. Für verschwindendes ε strebt diese Differenz mithin gegen 0, was zu beweisen war.

Festlegung der Nebenbedingungen für die Greensche Funktion.

7. Nach 4. besteht die Aufgabe, der Funktion $G(x, t)$ solche Nebenbedingungen aufzuerlegen, daß die Gleichungen (18) bestehen. Diese Nebenbedingungen entsprechen den Randbedingungen bei Differentialgleichungsproblemen. (18) wird $n+1$ Bedingungsgleichungen ergeben, aus denen sich die Funktionen $r_{\nu}(t)$ in (13) in eindeutiger Weise bestimmen lassen.

Wir beginnen bei der Herstellung der Gleichungen (18) mit $\mu = n$ und gehen dazu von dem Ansatz (13) aus. Es werde

$$\psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi} \, dx \tag{25}$$

gesetzt. Dann ist auf Grund des erwähnten Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12)

$$h_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_\nu(\xi)}{x-\xi} \, d\xi.$$

Man darf unter dem Integralzeichen nach x integrieren und erhält

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi) \, d\xi \tag{26}$$

mit einer Konstanten k_ν. Weiterhin werde

$$h_\nu(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \\ h_\nu(x) & \text{für } x > t \end{cases} \tag{27}$$

und

$$\psi_\nu(\xi,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \frac{\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} h_\nu(x,t)}{x-\xi} \, dx \tag{28}$$

gesetzt. Dann gilt in analoger Weise mit einer von x nicht abhängigen Funktion

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} h_\nu(x,t) + k_\nu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi| \, \psi_\nu(\xi,t) \, d\xi. \tag{29}$$

Eine explizite Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$ folgt an späterer Stelle (Abschnitt 10), damit hier der Gedankengang nicht unterbrochen wird.

Wir brauchen schließlich die Formeln

$$a(x,t) = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)} \, d\xi = 0 \tag{30}$$

und

$$-\pi \ln 2 = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} \, d\xi. \tag{31}$$

Zur Herleitung des Wertes des Integrals (31) beachte man, daß es durch Integration der aus (9) und (12) folgenden Identität

$$0 = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}$$

nach x entsteht und demnach eine Konstante darstellt. Setzt man $x = 0$, $\xi = \cos\zeta$, so läßt sich (31) sehr leicht beweisen.

Zum Beweise von (30) wird zunächst

$$A(x,t) = \int_0^x a(x,t)\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\,(\ln|x-\xi|-1)}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi$$

gebildet und hierin die Identität

$$\frac{x-\xi}{t-\xi} = 1 + \frac{x-t}{t-\xi}$$

angewendet. Man erhält dann

$$A(x,t) = -\pi(1+\ln 2) + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{\ln|x-\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi + (x-t)\int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)};$$

das letzte Integral ist 0, also

$$A(x,t) = -\pi(1+\ln 2) + (x-t)\frac{\partial}{\partial x}A(x,t).$$

Es hängt demnach $a(x,t)$ von x nicht ab.

Es ist nun andererseits

$$a(x,t) = \ln x \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(1-\xi)} + \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln\left|1-\frac{\xi}{x}\right|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(t-\xi)}\,d\xi;$$

dieser Ausdruck wird mit wachsendem x immer kleiner. Da er aber von x nicht abhängt, verschwindet er identisch, wie zu beweisen war.

Nach (13), (17) und (25) bis (31) ergibt sich nun

$$(32)\quad \varphi(\xi,t) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(\psi_\nu(\xi)r_\nu(t) + \psi_\nu(\xi,t)s_\nu(t)\right) + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

und

$$(33)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\psi(\xi,t)\,d\xi - \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,t) + \sum_{\nu=0}^{n} \left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t) s_\nu(t)\right) - \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Die letzte der Gleichungen (18) (μ n) verlangt nach (33) also

$$(34)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \gamma_0(\xi)\,\varphi(\xi,t)\,d\xi \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \left(k_\nu r_\nu(t) + k_\nu(t) s_\nu(t)\right) + \varphi_0(t)\frac{\ln 2}{\pi}.$$

Gilt (34), so integriere man die nunmehr gültige letzte Gleichung (18) nach x von 0 bis x und erhält die vorletzte

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(x\,\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi) + \Im_1(x-\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,d\xi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x,t).$$

wofern

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-1} \left(\gamma_1(\xi) + \Im_1(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,dt = \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x,t)\right]_{x=0}$$

ist. Dieses Verfahren wird nacheinander n-mal fortgesetzt, und man hat neben (34) die n Gleichungen

$$(35)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \left(\gamma_\mu(\xi) - \Im_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,dt \qquad \left[\frac{\partial^{n-\mu}}{\partial x^{n-\mu}} G(x,t)\right]_{x=0} \quad (\mu = 1, \ldots, n)$$

zu erfüllen. Das sind zusammen $n+1$ lineare inhomogene Gleichungen für die $n+1$ noch unbekannten Funktionen $r_\nu(t)$.

Bestimmung der Funktionen $r_\nu(t)$. Existenzfragen.

8. Eine explizite Bestimmung der $r_\nu(t)$ kann natürlich nur in Spezialfällen durchgeführt werden, wo die Funktionen $c_\mu(x)$, $\gamma_\mu(\xi)$ bekannt sind. Jedoch können noch die Gleichungen (34), (35) in eine übersichtlichere Form gebracht und ihre Lösbarkeit im allgemeinen Falle erörtert werden.

Die Integrale auf der linken Seite von (34) und (35) haben die Form

$$(36)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{1}^{+1} \left(\gamma_\mu(\xi) + \Im_\mu(\xi)\right)\varphi(\xi,t)\,d\xi = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\varrho_{\mu\nu}\cdot r_\nu(t) + \varrho_{\mu\nu}(t) s_\nu(t)\right) + \sigma_\mu(t) + \sigma_\mu\cdot\varphi_0(t) \qquad (\mu = 0, \ldots, n)$$

mit

$$\varrho_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx,$$

$$\varrho_{\mu,\nu}(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}h_\nu(x,t)\,\frac{dx}{x-\xi},$$

(37)

$$\sigma_\mu(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi)}{t-\xi}\,d\xi.$$

$$\sigma_\mu = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi,$$

wobei für $\mu = 0$ das $\Im_0(\xi)$ auszulassen ist.

Die rechten Seiten von (35) haben die Form

$$(38)\qquad -\sum_{\nu=0}^{n}\left[h_\nu^{(n-\mu)}(0)\,r_\nu(t)+\begin{cases}0 & \text{für } t>0\\ h_\nu^{(n-\mu)}(0)\,s_\nu(t) & \text{für } t<0\end{cases}\right]$$

$$(\mu = 1,\ldots,n).$$

Die Funktionen (37) und die von $r_\nu(t)$ freien Glieder in (38) sind sämtlich stetige, allerdings teilweise nur stückweise stetig differenzierbare Funktionen, wie man leicht unter Benutzung von (14) und (27) nachweist.

Mit dem System der $r_\nu(t)$ als Zeilenvektor kann man (34) und (35) in der symbolischen Form

$$(39)\qquad \mathfrak{r}(t)\mathfrak{R} = \mathfrak{u}(t) + \varphi_0(t)\cdot\mathfrak{v}$$

anschreiben, wobei $\mathfrak{R}$ eine konstante Matrix, $\mathfrak{v}$ ein konstanter Vektor und $\mathfrak{u}(t)$ ein Vektor aus stetigen Funktionen von t ist.

Besitzt $\mathfrak{R}$ eine Inverse, so ist (39) eindeutig auflösbar, und die Lösung hat die Form

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{l}(t) + \varphi_0(t)\mathfrak{n}.$$

Nunmehr ist $G(x,t)$ vollständig definiert und damit auch

$$\varphi(\xi,t) = \mathsf{\Lambda}(\xi,t) + \varphi_0(t)\,\mathsf{N}(\xi).$$

Wie man sieht, ist neben $\mathsf{\Lambda}(\xi,t)$ auch $\mathsf{N}(\xi)$ eindeutig bestimmt. In diesem Falle besitzt (1) für jedes stetig differenzierbare $f(t)$ die Lösung (5), es gibt im wesentlichen eine einzige Lösung der zu (1) gehörigen homogenen Gleichung (6) und jede Lösung von (1) entsteht aus einer festen durch Addition von Vielfachen der Lösung von (6).

9. Die einzige wesentliche Schwierigkeit bei der numerischen Berechnung des lösenden Kerns (17) von (1) liegt in der Bestimmung der $r_\nu(t)$. Da man aber nicht den lösenden Kern, sondern für ein jeweils gegebenes $f(x)$ nur die Funktion $\varphi(\xi)$ sucht, genügt es, wenn man die Konstanten

$$r_\nu[f] = \int_{-1}^{+1} r_\nu(t)\, f(t)\, dt \tag{40}$$

berechnet. Setzt man nämlich diese an Stelle der $r_\nu(t)$ in (17) ein, so bekommt man die Lösung $\varphi(\xi)$ von (1). Führt man noch die Abkürzungen

$$\varrho_\mu[f] = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \varrho_{\mu\nu}(t) s_\nu(t) f(t) dt, \tag{41}$$

$$k[f] = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu(t) s_\nu(t) f(t) dt. \tag{42}$$

$$\sigma_\mu[f] = \int_{-1}^{+1} \sigma_\mu(t) f(t) dt \tag{43}$$

ein, so ist es das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} (\varrho_{0\nu} + k_\nu)\, r_\nu[f] = -\sigma_0[f] - k[f] + \varphi_0 \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} - \sigma_0\right) \\ &\sum_{\nu=0}^{n} \left(\varrho_{\mu\nu} + h_\nu^{(n-\mu)}(0)\right) r_\nu[f] = -\sigma_\mu[f] - \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(n-\mu)}(0) \int_{-1}^{0} s_\nu(t) f(t) dt - \varphi_0 \cdot \sigma_\mu \end{aligned} \tag{44}$$

mit derselben Koeffizientenmatrix $\mathfrak{R}$ wie (39), das man aufzulösen hat, was im Einzelfall keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Berechnung der k_ν und $k_\nu(t)$.

10. Es wird gesetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \psi_\nu(\xi)\, d\xi; \tag{45}$$

dann ist $\Psi_\nu(-1) = 0$ und

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\, dx.$$

Hier darf auf Grund einer zu 6. völlig analogen Überlegung die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, und man erhält

$$\Psi_\nu(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, h_\nu^{(n+1)}(x)\, dx \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)} = 0.$$

Durch partielle Integration wird nun

$$\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\psi_\nu(\xi)\,d\xi = \ln|x-\xi|\,\Psi_\nu(\xi)\Big|_{\xi=-1}^{\xi=+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_1(\xi)}{x-\xi}\,d\xi,$$

also nach (26)

$$h_\nu^{(n)}(x) + k_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_\nu(\xi)}{x-\xi}\,d\xi.$$

Auf Grund des Zusammenhanges zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ist jetzt

$$\Psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{46}$$

mit einer weiteren Konstanten k_ν'. Diese Formel wird nun nach ξ differenziert und das Ergebnis mit (25) unter Benutzung von (45) verglichen. Zur Bildung der Ableitung von (46) ist zu benutzen:

$$\frac{d}{d\xi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Big|_{x=\xi+\varepsilon}^{x=\xi-\varepsilon}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)\,\frac{dx}{(x-\xi)^2};$$

das wird nach partieller Integration

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\Big|_{x=-1}^{x=+1} + \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx,$$

wobei der erste Summand verschwindet. Man erhält somit

$$\Psi_\nu'(\xi) = \frac{\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{x-\xi}\,dx + \frac{k_\nu'\,\xi}{\pi\sqrt{(1-\xi^2)^3}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx - \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{x\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\xi)}\,dx$$

$$= \psi_\nu(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,h_\nu^{(n+1)}(x)}{x-\xi}\,dx.$$

Es folgt hieraus

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(\xi(1-x^2)-x(1-\xi^2))\,(h_\nu^{(n)}(x)+k_\nu)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-\xi)}\,dx + \frac{k_\nu'}{\pi}\,\xi = 0,$$

also

$$k_\nu = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; \tag{47}$$

der Wert von k_ν' interessiert nicht.

Die gleichen Rechnungen lassen sich mit der unstetigen Funktion (27) an Stelle von $h_\nu(x)$ durchführen, und man erhält

$$k_\nu(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{t}^{1} \frac{h_\nu^{(n)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{48}$$

Entartete Kerne.

11. In (2) wird

$$c_\nu(x) = p^{\nu+1}c_\nu^*(x), \quad \gamma_\nu(\xi) = p^{-\nu-1}\gamma_\nu^*(\xi) \tag{49}$$

gesetzt, mit der Absicht, später zur Grenze $p = 0$ überzugehen. Der Kern L geht bei diesem Grenzprozeß in einen Kern L^* über, der von logarithmischen Bestandteilen frei ist. Wir wollen zeigen, daß auch $\mathsf{\Lambda}$ und N Grenzwerte $\mathsf{\Lambda}^*$ und N^* besitzen, die mit L^* in derselben Beziehung stehen wie $\mathsf{\Lambda}$ und N mit L.

Wir bedienen uns dabei der folgenden Schreibweise: Eine Formel, die aus einer Formel (m) durch den beschriebenen Grenzübergang entsteht, wird mit (m^*) beziffert. Eine Größe $P(x, \xi)$, die hierbei gleichmäßig in x, ξ und p beschränkt bleibt, wird

$$P(x, \xi) = O(p)$$

geschrieben. Die Formel

$$L(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^*(x)\,\gamma_\nu^*(\xi) + p\,O(p) \tag{2*}$$

$$= L^*(x, \xi) + p\,O(p)$$

fällt zwar nicht unter diese Abmachung, sie darf jedoch mit Rücksicht auf die schwache, die Integrierbarkeit nicht störende Unendlichkeitsstelle des Logarithmus ausnahmsweise zugelassen werden.

Das Lösungsfundamentalsystem $h_\nu(x)$ der zu (10) gehörigen homogenen linearen Differentialgleichung werde durch die Zusatzbedingungen

$$h_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} p^{n-\mu} & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases}$$

präzisiert. Setzt man

$$h_\nu(x) = l_\nu(y), \quad y = px, \tag{50}$$

so gilt

$$l_\nu^{(n+1)}(y) + c_0^*(x)\, l_\nu^{(n)}(y) + \cdots + c_n^*(x)\, l_\nu(y) = 0, \tag{51}$$

$$l_\nu^{(\mu)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{cases} \tag{52}$$

Es gilt das Verhalten der $l_\nu^{(\mu)}(y)$ für kleine p zu untersuchen. Dazu seien zunächst $\bar{l}_\nu(y)$ Funktionen, die den Differentialgleichungen

$$\bar{l}_\nu^{(n+1)}(y) = \bar{c}_0 \bar{l}_\nu^{(n)}(y) + \cdots + \bar{c}_n \bar{l}_\nu(y)$$

und denselben Anfangsbedingungen (52) wie die $l_\nu(y)$ genügen; dabei soll

$$\bar{c}_\nu = \operatorname{Max} |c_\nu^*(x)|$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$ sein. Dann ist für x in diesem Intervall

$$|l_\nu^{(\mu)}(y)| \leqq \bar{l}_\nu^{(\mu)}(y) = O(p) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{53}$$

Jetzt gilt

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = l_\nu^{(\mu)}(0) + px\, l_\nu^{(\mu+1)}(\vartheta_{\nu\mu} y) \qquad (\mu = 0, \ldots, n)$$

mit Zahlen $0 \leqq \vartheta_{\nu\mu} \leqq 1$. Das ergibt nach (52) und (53)

$$l_\nu^{(\mu)}(y) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{für } \mu = n - \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq n - \nu \end{matrix} \right\} + pO(p) \qquad (\mu = 0, \ldots, n). \tag{54}$$

(54) in (51) eingesetzt, liefert sodann

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\lambda_\nu(x) \tag{55}$$

mit

$$\lambda_\nu(x) = O(p), \quad \frac{d}{dx}\lambda_\nu(x) = O(p), \tag{56}$$

wovon die zweite Behauptung noch zu beweisen ist.

Wir beachten dazu, daß die $h_\nu^{(\mu)}(x)$ analytische ganze Funktionen von p sind. Die $l_\nu^{(\mu)}(y)$ entstehen aus ihnen durch Division durch p^μ; da diese letzteren wegen (53) für $p = 0$ endlich bleiben, sind sie auch analytische ganze Funktionen von p. Es ist speziell also

$$l_\nu^{(n+1)}(y) = -c_\nu^*(x) + p\alpha_1(x) + p^2\alpha_2(x) + \cdots,$$

woraus sich durch Integration über den Einheitskreis

$$\alpha_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{l_\nu^{(n+1)}(y)}{p^{\nu+1}}\,dp$$

ergibt. Da die $c_\nu(x)$ voraussetzungsgemäß nach x stetig differenzierbar sind, folgt aus dieser Gleichung auch die stetige Differenzierbarkeit der $\alpha_\nu(x)$. Nunmehr ergibt sich die zweite Behauptung (56) auch.

Jetzt ist der lösende Kern für (2*) verhältnismäßig leicht berechnet. Zunächst folgt aus (14), (50) und (54)

$$s_\nu(t) = p^{-n}O(p). \tag{14*}$$

Sodann aus (47), (48), (50) und (54)

$$k_\nu = \left\{\begin{matrix} -p^n & \text{für } \nu = 0 \\ 0 & \text{für } \nu > 0 \end{matrix}\right\} + p^{n+1}O(p), \tag{47*}$$

$$k_\nu(t) = p^n O(p). \tag{48*}$$

Ferner aus (37), (49), (50), (55) und (56), unter eventueller Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned} (37^*)_1 \qquad \varrho_{\mu\nu} &= -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\gamma_\mu^*(\xi)\,c_\nu^*(x)\,dx\,d\xi + p^{n-\mu+1}O(p) \\ &= p^{n-\mu}\cdot\varrho_{\mu\nu}^* + p^{n-\mu+1}O(p), \\ (37^*)_2 \qquad \varrho_{\mu\nu}(t) &= -p^{n-\mu}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\gamma_\mu^*(\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{c_\nu^*(x)}{x-\xi}\,dx + p^{n-\mu+1}O(p) \\ &= p^{n-\mu}\varrho_{\mu\nu}^*(t) + p^{n-\mu+1}O(p), \\ (37^*)_3 \qquad \sigma_\mu(t) &= p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{t-\xi}\,d\xi + p^{-\mu}O(p) \\ &= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^*(t) + p^{-\mu}O(p), \\ (37^*)_4 \qquad \sigma_\mu &= p^{-\mu-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\gamma_\mu^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi + p^{-\mu}O(p) \\ &= p^{-\mu-1}\cdot\sigma_\mu^* + p^{-\mu}O(p). \end{aligned}$$

Nun aus (34), (35), (14*), (47*), (48*), (37*)

$$r_\nu(t) = p^{-n-1}\cdot r_\nu^*(t) + p^{-n}O(p), \tag{57}$$

wobei die $r_\nu^*(t)$ den linearen Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{0\nu}^* \, r_\nu^*(t) + \sigma_0^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_0^* = r_0^*(t) \tag{34*}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varrho_{\mu\nu}^* \, r_\nu^*(t) + \sigma_\mu^*(t) + \varphi_0(t) \cdot \sigma_\mu^* = r_\mu^*(t) \tag{35*}$$

genügen. (34*) ist als Spezialfall in (35*) enthalten, aber nicht (34) in (35).

Der lösende Kern wird jetzt endlich nach (13), (17), (50), (55), (56), (14*), (57)

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) = &- \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}} \, c_\nu^*(x) \, r_\nu^*(t) \, \frac{dx}{x-\xi} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}} \, \frac{1}{t-\xi} + \frac{\varphi_0(t)}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + p\,O(p) \\ = &\ \varphi^*(\xi, t) + p\,O(p). \end{aligned} \tag{17*}$$

Wie die Formeln (2*) und (17*) zeigen, ist der Grenzübergang $p \to 0$ durchführbar, ohne daß dadurch die Beziehung gestört würde, daß (17*) der allgemeinste lösende Kern von (2*) ist. Ist nämlich $f(x)$ irgendeine stetig differenzierbare Funktion, so gilt für

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi, t) \, f(t) \, dt &= \int_{-1}^{+1} \varphi^*(\xi, t) \, f(t) \, dt + p\,O(p) \\ &= \varphi^*(\xi) + p\,O(p) \end{aligned}$$

die Integralgleichung

$$\int_{-1}^{+1} L^*(x, \xi) \, \varphi^*(\xi) \, d\xi = f(x) + p\,O(p).$$

Daß (17*) ein lösender Kern von (2*) ist (bei $p = 0$), kann man selbstverständlich viel einfacher nachweisen, indem man nur (37*), (34*), (35*) und den Zusammenhang zwischen den Integralgleichungen (9) und (12) ausnutzt. Jedoch würde man dann keine Aussage über die Größe des Fehlergliedes bei dem Grenzübergang erhalten.

Die Bemerkungen des 9. Abschnitts zur numerischen Auflösung einer Integralgleichung (1) gelten für Kerne (2*) in gleicher Weise.

Hilfsformeln für die praktische Rechnung bei speziellen Differenzkernen.

12. Es soll jetzt einmal zunächst untersucht werden, was für Differenzkerne $L(x, \xi) = L(x - \xi)$ überhaupt in eine Reihe (2) mit eventuell unendlicher Gliederzahl entwickelt werden können. Wir setzen dazu

$$x - \xi = w.$$

Es werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, daß

$$\lim_{\xi \to x} (x - \xi) L(x - \xi) = 1$$

ist. Nun werden die Konstanten c_0, α_0 so bestimmt, daß

$$L(w) - \frac{1}{w} - c_0 \ln |w| - \alpha_0 = L_1(w)$$

für $w = 0$ verschwindet. Dann c_1, α_1 so, daß

$$L_1'(w) - c_1 \ln |w| - \alpha_1 = L_2(w)$$

für $w = 0$ verschwindet, und so fort.

Es ist dann nach (3)

$$L(w) = \frac{1}{w} + c_0 \mathfrak{I}_0(w) + \alpha_0 + c_1 \mathfrak{I}_1(w) + \alpha_1 w + \cdots + c_n \mathfrak{I}_n(w) + \frac{1}{n!} \alpha_n w^n + \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n. \tag{58}$$

Mindestens einmal sei $c_n \neq 0$; dann ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_n &= c_n \beta_0, \\ \alpha_{n-1} &= c_n \beta_1 + c_{n-1} \beta_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0 &= c_n \beta_n + c_{n-1} \beta_{n-1} + \cdots + c_0 \beta_0 \end{aligned}$$

nach den β_ν auflösbar, und (58) läßt sich in der Form

$$L(w) = \frac{1}{w} + c_0(\beta_0 + \mathfrak{I}_0(w)) + c_1(\beta_0 w + \beta_1 + \mathfrak{I}_1(w)) + \cdots + c_n\left(\frac{1}{n!} \beta_0 w^n + \frac{1}{(n-1)!} \beta_1 w^{n-1} + \cdots + \beta_n + \mathfrak{I}_n(w)\right) + \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n$$

schreiben. Das Restglied in dieser Formel ist

$$\left| \int_0^w \cdots \int_0^w L_n(w)\, dw^n \right| \leqq \frac{w^n}{n!} |L_n(w)|,$$

es strebt mit wachsendem n für alle w gegen 0, wenn nicht gleichzeitig $f_n(w)$ allzu stark anwächst.

In dieser Form lassen sich also alle Funktionen

$$L(w) = \frac{1}{w} + L_1(w) + \ln |w| \cdot L_2(w)$$

entwickeln, wobei entweder L_1 und L_2 Polynome sind, von denen L_1 nicht den größeren Grad hat, oder L_1 und L_2 in einem Kreise $|w| < \varrho < 2$ reguläre analytische nicht ganze rationale Funktionen. Speziell die Hankelsche Funktion $H_1^{(2)}(w)$ hat diese Eigenschaft.

Führt man wieder $x - \xi$ an Stelle von w ein, so geht (59) bei Vernachlässigung des Restes in (2) über, wenn man noch setzt:

$$c_\mu(x) = c_\mu, \quad \gamma_\mu(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{(-\xi)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}\beta_\nu. \tag{60}$$

13. Bei solchermaßen spezialisierten Kernen läßt sich die Aufstellung des Gleichungssystems (44) zum großen Teil explizit leisten, wozu wir nunmehr übergehen. Formeln, die aus einer allgemeinen Formel (m) entstehen, schreiben wir zur leichteren Rückorientierung (m_1), (m_2) usw.

Zunächst stellen wir fest, daß

$$h_\nu(x) = e^{\lambda_\nu x} \tag{61}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der zu (10) gehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Dabei sind die λ_ν die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$p(\lambda_\nu) = \lambda_\nu^{n+1} + c_0\lambda_\nu^n + \cdots + c_n = 0;$$

wir wollen den einfacheren Fall voraussetzen, daß sie alle untereinander verschieden sind. Man rechnet leicht nach:

$$s_\nu(t) = e^{-\lambda_\nu t} \prod_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = \frac{(-1)^{n-1}}{p'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu t}. \tag{14_1}$$

Ferner

$$k_\nu = -\lambda_\nu^n J_0(i\lambda_\nu), \tag{47_1}$$

wobei J_0 die nullte Besselsche Funktion bezeichnet.

Die Größen $\varrho_{\mu\nu}$ in (37) sind lineare homogene Integralformen, was durch die Schreibweise

$$\varrho_{\mu\nu} = \mathsf{P}[\gamma_\mu(\xi) + \mathfrak{I}_\mu(\xi),\ h_\nu^{(n+1)}(x)]$$

zum Ausdruck kommen soll.

Sie lassen sich mittels der speziellen Integralformen

$$\mathsf{P}[\cos\varrho\zeta,\ e^{\lambda x}], \quad \mathsf{P}[\xi^\varrho \ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] \quad (\cos\zeta = \xi,\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

linear zusammensetzen. Diese letzteren sind jetzt zu berechnen.

Verwendet man die bekannte Identität[2])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos\varrho\zeta}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{x-\xi} = -\frac{\sin\varrho z}{\sin z} \qquad (\cos z = x), \tag{62}$$

so ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\mathsf{P}[1, e^{\lambda x}] = 0 \tag{37_1}$$

und für $\varrho > 0$

$$\mathsf{P}[\cos \varrho\zeta,\ e^{\lambda x}] = -\frac{\lambda^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda\cos z}\sin\varrho z\sin z\,dz$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{2}\left(i^{\varrho+1}J_{\varrho+1}(-i\lambda) - i^{\varrho-1}J_{\varrho-1}(-i\lambda)\right),$$

wenn J_ϱ die ϱ-te Besselsche Funktion bezeichnet, infolge ihrer bekannten Rekursionsformel also

$$(37_2)\qquad \mathsf{P}[\cos\varrho\zeta;\ e^{\lambda x}] = i^{2-\varrho}\lambda^n J_\varrho(i\lambda) \qquad (\varrho > 0).$$

Weniger einfach sind die $\mathsf{P}[\xi^\varrho \ln|\xi|,\ e^{\lambda x}]$ zu berechnen. Ich muß mich leider damit begnügen, ein endliches Berechnungs*verfahren* anzugeben. Es ist nach (30)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = 0,$$

hiernach und nach (31)

$$(63)\qquad \begin{aligned}&\int_{-1}^{+1}\frac{\xi\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = -\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi\ln 2,\\ &\int_{-1}^{+1}\frac{\xi^2\ln|\xi|}{\sqrt{1-\xi^2}\,(x-\xi)}\,d\xi = x\cdot\pi\ln 2,\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Also

$$(37_3)\qquad \begin{aligned}&\mathsf{P}[\xi^0\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = 0,\\ &\mathsf{P}[\xi^1\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = -i\lambda^n\ln 2\cdot J_1(i\lambda),\\ &\mathsf{P}[\xi^2\ln|\xi|,\ e^{\lambda x}] = \frac{i}{4}\lambda^{n+1}\ln 2\cdot\left(J_3(i\lambda) - 3J_1(i\lambda)\right),\ \text{usw.}\end{aligned}$$

Es sind also alle $\varrho_{\mu\nu}$ als Linearkombinationen von Besselschen Funktionen darstellbar.

Schließlich lassen sich noch die $\sigma_\mu(t)$ und σ_μ unter Anwendung von (62) und (63) explizit bestimmen, und damit auch die Integrale (43).

14. Die noch übrige Berechnung der Integrale (41) und (42) enthält die einzige Schwierigkeit, die bei der Lösung der Integralgleichung auftritt, und diese ist auch nicht erheblich. Neben $f(x)$ werden zunächst die Funktionen

$$(64)\qquad \mathfrak{f}_\nu(t) = \int_{-1}^{t} e^{-\lambda_\nu x} f(x)\,dx$$

eingeführt. Es ergibt sich dann nach partieller Integration unter Benutzung von (14_1), (37) und (47)

$$(41_1)\quad \varrho_\mu[f] = -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}(\gamma_\mu(\xi)+\Im_\mu(\xi))\,d\xi\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu t}\mathfrak{f}_\nu(t)}{t-\xi}\,dt,$$

$$(42_1)\quad k[f] = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{-1}^{+1}\frac{e^{\lambda_\nu t}\mathfrak{f}_\nu(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-\lambda_\nu)^n}{p'(\lambda_\nu)}\int_{0}^{\pi}e^{\lambda_\nu\cos\tau}\,\mathfrak{f}_\nu(\cos\tau)\,d\tau,$$

wobei man noch in (41_1) die Integration über ξ mit Hilfe der Formeln (62) und (63) explizit ausführen kann, so daß in beiden Fällen nur noch einfache Integrale übrigbleiben.

Hiermit ist jetzt alles zur Auflösung des Gleichungssystems (44) vorbereitet; hat man die $r_\nu[f]$ aus (44) bestimmt, so ist

$$(17_1)\quad \varphi(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu^{n+1}r_\nu[f]\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\xi^2}}\,\frac{f(t)}{t-\xi}\,dt+\frac{\varphi_0}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}$$

die gesuchte Lösung der Integralgleichung. Das zweite und dritte Glied hier stellt die Grundlösung für den Kern $L(x,\xi)\quad(x-\xi)^{-1}$ dar; das erste gibt die Korrektur an, mit der diese Grundlösung bei allgemeinen Kernen (2) zu versehen ist. Es enthält die höheren transzendenten Funktionen

$$(25_1)\quad \chi(\xi,\lambda_\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-\xi^2}}\,\frac{e^{\lambda_\nu x}}{x-\xi}\,dx = \lambda_\nu^{-n-1}\psi_\nu(\xi),$$

von denen ich zum Schluß einige einfache Eigenschaften angeben will.

15. Es ist

$$\chi(\xi,\lambda) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,e^{\lambda x}-\sqrt{1-\xi^2}\,e^{\lambda\xi}}{x-\xi}\,dx+\frac{e^{\lambda\xi}}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\ln\left|\frac{1-\xi}{1+\xi}\right|,$$

wobei der erste Bestandteil in der Riemannschen Fläche von $\sqrt{1-\xi^2}$ eindeutig und im Endlichen bis auf Pole erster Ordnung in den beiden Verzweigungspunkten regulär ist. χ hat demnach für $\xi = \pm 1$ je eine algebraisch und logarithmisch singuläre Stelle.

Es soll für χ eine Reihenentwicklung hergeleitet werden. Man verifiziert dazu leicht

$$e^{\lambda x} = J_0(i\lambda) + 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\cos\varrho z \qquad (\cos z = x);$$

setzt man diese Reihe in (25_1) unter Benutzung von

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sin\varrho z \frac{dx}{x-\xi} = -\cos\varrho\zeta^{2})$$

ein, so entsteht die gesuchte Entwicklung

$$\chi(\xi,\lambda) = 2\sum_{\varrho=1}^{\infty} i^{-\varrho} J_\varrho(i\lambda)\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}; \tag{65}$$

sie konvergiert für $|\xi| < 1$.

Für $\xi = \pm 1$ ist ferner

$$\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\chi(\xi,\lambda)\right]_{\xi=\pm 1} = J_0(i\lambda) \mp J_1(i\lambda). \tag{66}$$

Schlußbemerkung. Das Iterationsverfahren.

16. In manchen Fällen dürfte sich die Berechnung der Lösungsfunktion $\varphi(\xi)$ in Form von Reihen empfehlen, die nach den Funktionen $\frac{\cos\varrho\zeta}{\sin\zeta}$ fortschreiten. Wenn man $f(x)$ nach $\frac{\sin\varrho z}{\sin z}$ entwickelt, bekommt man das Hauptglied von (17_1) in dieser Gestalt, und das gleiche gilt nach (65) für das Korrekturglied. Auf diese Weise nutzt man am besten die Identität (65) aus.

In anderen Fällen wird ein Iterationsansatz für die Lösung von (1) anzuraten sein. Man löst zunächst (1) für den entarteten Kern L^*, bildet mit der so gefundenen Lösung $\varphi^*(\xi)$ die Funktion

$$f_1(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} L(x,\xi)\,\varphi^*(\xi)\,d\xi, \tag{67}$$

die man als neue linke Seite für die Integralgleichung mit dem Kern L^* nimmt, und fährt so fort. Das Verfahren kann unter Umständen schnell konvergieren. Mit dem Ansatz (49) ist die Matrix $\mathfrak{R}$ des Gleichungssystems (39) bzw. (40) eine ganze rationale Funktion von p, und das gleiche gilt für die rechten Seiten. Vermöge dieser Gleichungen hängt der lösende Kern (17) analytisch von p ab, und in (11. wurde gezeigt, daß er für $p \neq 0$ regulär analytisch von p abhängt. Nun ist das Iterationsverfahren aber nichts anderes als eine Entwicklung von (17) in eine Potenzreihe von p um den Punkt $p = 0$.

Es konvergiert demnach bis zur absolut kleinsten singulären Stelle. Solche muß es aber gewiß geben, und zwar gerade dort, wo die Determinante $|\Re|$, die von p ganz rational abhängt, verschwindet, den Punkt $p = 0$ ausgenommen. An genau diesen Stellen nämlich existiert der lösende Kern (17) nicht.

Die Handhabung des Iterationsverfahrens ist in dem zuletzt betrachteten Spezialfalle eines Differenzkerns überaus einfach. Der entartete Kern reduziert sich nach (49) und (60) auf

$$L^*(x-\xi) = \frac{1}{x-\xi} + \text{const},$$

und entsprechend einfach sind die Lösung $\varphi^*(\xi)$ sowie die Integrale von (67) zu gewinnen.

Jetzt hat auch die Entartung des Kerns eine auf der Hand liegende Bedeutung, es ist nämlich

$$L^*(x-\xi) - c_0^* \gamma_0^* = \lim_{p \to 0} pL\left(p(x-\xi)\right).$$

(Eingegangen am 27. Juni 1942.)

Elementarer Beweis der Dreiecksungleichung in der Poincaréschen Halbebene.

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder
zum 80. Geburtstag gewidmet.

Von

Othmar Baier in Stuttgart.

In einer Ebene seien die drei Punkte A, B, C auf derselben Seite einer Geraden g. Einer oder mehrere der Punkte dürfen auch auf g liegen. Bezeichnen A_1, B_1, C_1 die Spiegelpunkte von A, B, C bezüglich g und werden die positiv gerechneten Strecken durch ihre Endpunkte bezeichnet, dann gilt die Ungleichung

$$\frac{\frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1}}{1 + \frac{AC}{AC_1} \cdot \frac{BC}{BC_1}} \geqq \frac{AB}{A_1B} \quad (1)$$ [1].

Wenn wenigstens einer der Punkte A, C auf g liegt, ist $AC/AC_1 = 1$, andernfalls < 1. Für den fortan ausgeschlossenen Fall, daß wenigstens einer der Punkte A, B, C auf g liegt, besteht die Ungleichung (1) offenbar zu Recht, mit „$>$“, falls nur C auf g, sonst mit „$=$“.

Wird A festgehalten und bewegt sich C (Fig. 1), dann sind die Niveaulinien $AC/AC_1 = AC/A_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[A]$ mit den Grundpunkten A und A_1. Entsprechend ergeben sich für $BC/BC_1 = BC/B_1C = \text{const}$ die Kreise des hyperbolischen Kreisbüschels $[B]$ mit den Grundpunkten B und B_1.

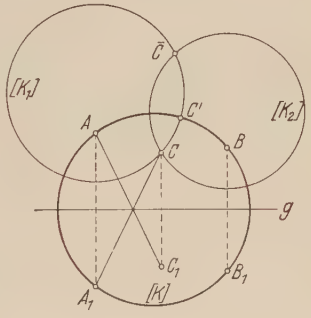

Fig. 1.

[1]) Das Problem, die Ungleichung (1) elementar zu beweisen, wurde von C. Carathéodory gestellt. Durch

$$\operatorname{tgh} s = AB/A_1B, \quad \operatorname{tgh} s_1 = AC/AC_1, \quad \operatorname{tgh} s_2 = BC/BC_1$$

sind s, s_1, s_2 reell eindeutig bestimmt und (1) erhält die Form

$$\operatorname{tgh}(s_1 + s_2) \geqq \operatorname{tgh} s, \quad \text{woraus folgt} \quad s_1 + s_2 \geqq s.$$

Dabei ist

$$2\,ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

das Nichteuklidische Bogenelement. – K. Pisot hat ebenfalls einen hübschen, elementaren Beweis der Ungleichung (1) gefunden.

B liege zunächst nicht auf der Geraden AA_1. Die beiden Kreisbüschel $[A]$ und $[B]$ haben dann den gemeinsamen Orthogonalkreis (K), dessen Mittelpunkt auf g liegt. (K_1) und (K_2) seien die beiden Kreise der Büschel $[A]$ bzw. $[B]$ durch C. Für diejenigen Punkte von (K_1), die innerhalb von (K_2) liegen, ist die linke Seite von (1) kleiner geworden, da AC/A_1C auf (K_1) konstant ist und BC/B_1C innerhalb von (K_2) kleinere Werte annimmt[2]). Solche Punkte gibt es höchstens dann nicht, wenn C schon auf (K) liegt, da (K_1) und (K_2) als Orthogonalkreise von (K) durch den Spiegelpunkt $\bar{C}$ von C in bezug auf (K) gehen müssen. Bewegt sich also C auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C' von (K_1) mit (K) angenommen, der innerhalb von (K_2) liegt.

Für $C' = A$ oder $C' = B$ gilt in (1) offenbar das Gleichheitszeichen.

C' liege zwischen A und B (Fig. 2). Dann ergibt die linke Seite von (1) für C'

$$(2)\qquad \frac{AC'\cdot BC_1' + BC'\cdot AC_1'}{AC_1'\cdot BC_1' + AC'\cdot BC'} = \frac{AC'\cdot B_1C' + B_1C_1'\cdot AC_1'}{A_1C'\cdot B_1C' + A_1C_1'\cdot B_1C_1'} \quad \text{(Spiegelung an } g\text{)}$$

$$= \frac{\sin^2\mu\,(\sphericalangle AC'B_1 + \sphericalangle AC_1'B_1)}{\sin^2\lambda\,(\sphericalangle A_1C'B_1 + \sphericalangle A_1C_1'B_1)}.$$

λ und μ sind die zu A_1B_1 bzw. $AB_1 = A_1B$ gehörigen Peripheriewinkel; wegen sin kann man jeweils irgendeinen nehmen. Nun ist

$$\sphericalangle AC'B_1 + \sphericalangle AC_1'B_1 = \text{Viereck } AC'B_1C_1' = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1' \quad (AA_1 /\!/ C'C_1')$$

$$\sphericalangle A_1C'B_1 + \sphericalangle A_1C_1'B_1 = \text{Viereck } A_1C'B_1C_1'.$$

Die rechte Seite von (2) ist also gleich ihrem Wert für $C' = A$ oder $C' = B$, nämlich AB/A_1B, d. h. für C' gilt in (1) das Gleichheitszeichen.

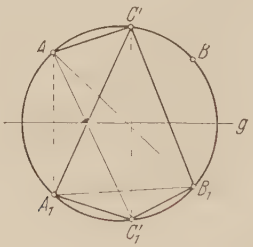

Fig. 2.

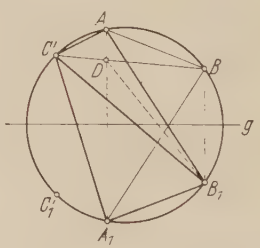

Fig. 3.

C' liege außerhalb von AB (Fig. 3). A liege zwischen C' und B, andernfalls tauschen A und B im folgenden ihre Rollen. (K_1) und (K_2) seien die Kreise von $[A]$ bzw. $[B]$ durch C'. (K_2) berührt dann (K_1) in C' von außen. Bewegt

[2]) $AC/AC_1 = a < 1$, $BC/BC_1 = x$, $y = \dfrac{a+x}{1+ax}$ nimmt für $x > 0$ mit x ab.

ich nun C' auf (K_1), dann wird das Minimum der linken Seite von (1) für den Schnittpunkt C'' von (K_1) mit (K) erreicht. Falls C'' innerhalb AB liegt, gilt (1). Andernfalls sei (K_3) der Kreis des Büschels $[B]$, der (K_1) von innen n C'' berührt. Sein zweiter Schnittpunkt mit (K) sei C'''. Die linke Seite von (1) wird für C', C'', C''' stets verkleinert und es läßt sich unschwer zeigen, daß schließlich einer der Punkte $C^{(n)}$ zwischen A und B zu liegen kommt, da die Kreisradien jeweils mindestens um den festen Betrag d (= Abstand AA_1 von BB_1) abnehmen. — (1) läßt sich in diesem Fall auch leicht direkt bestätigen:

Die linke Seite von (1) ergibt

$$\frac{AC' \cdot B_1C' + BC' \cdot A_1C'}{A_1C' \cdot B_1C' + AC' \cdot BC'} = \frac{\frac{2}{\sin \mu}(\triangle AC'B_1 + \triangle A_1C'B)}{\frac{2}{\sin \lambda}(\triangle A_1C'B_1 + \triangle AC'B)}. \tag{3}$$

D ist der Schnittpunkt von $C'B$ mit AA_1. Wegen $BB_1 // AA_1$ ist

$$\begin{aligned} \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } A_1B_1DC' \\ \triangle AB_1C' + \triangle A_1BC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' + \triangle C'DB_1 \\ \triangle A_1B_1C' + \triangle ABC' &= \text{Viereck } AB_1A_1C' - \triangle C'DB_1. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (3) ist somit stets größer als ihr Wert für $C' = A$ oder $C' = B$. Für C' gilt in (1) „$>$“.

Schließlich ist noch der Fall nachzuholen, daß B auf der Geraden AA_1 liegt. A und C werden festgehalten und B bewege sich auf dem Kreis des Büschels $[A]$. AB/A_1B und AC/AC_1 bleiben fest, BC/BC_1 kann wie oben verkleinert werden, bis B wieder auf dem Orthogonalkreis der Büschel $[A]$ und $[C]$ liegt.

Die Ungleichung (1) ist damit bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn 1. A, B, C auf einem g senkrecht schneidenden Kreis liegen und C zwischen A und B liegt oder 2. mindestens einer der Punkte A, B auf g liegt.

Aus (1) folgt

$$\frac{AC}{AC_1} + \frac{BC}{BC_1} > \frac{AB}{A_1B}. \tag{4}$$

Wegen der Spiegelung (Fig. 1) ist AC auch der kürzeste Weg von A nach C über g, so daß für die Verhältnisse der direkten kürzesten Wege zu den kürzesten Wegen über g die Dreiecksungleichung (4) gilt.

(Eingegangen am 25. Juli 1942.)

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

Eine Bemerkung zu den Beiträgen VI und VII[1].

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

In Anmerkung[21]) von Beitrag VI habe ich unter Berufung auf den Beweis von Satz 10 die Gültigkeit des folgenden *Primäridealsatzes* behauptet: Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$[2]), der über $\mathfrak{R}$ eine Modulbasis von endlich vielen, linear unabhängigen Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ besitzt. *Ist dann* $\mathfrak{x}$ *ein beliebiges Primärideal aus* $\mathfrak{R}$, *so besitzt* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}$ *eine Durchschnittsdarstellung* $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = \mathfrak{y}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{y}_m$, *bei der die* $\mathfrak{y}_i$ *Primärideale sind, die alle mit* $\mathfrak{R}$ *den Durchschnitt* $\mathfrak{x}$ *haben.*

Indessen zeigt eine genauere Untersuchung, daß der Beweis von Satz 10 nur dann stichhaltig ist, wenn $\mathfrak{S}$ nicht bloß die gewünschte Modulbasis besitzt, sondern darüber hinaus noch der folgenden *Normenbedingung* genügt:

Gleichzeitig mit β *gehört stets auch* $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ *zu* $\mathfrak{S}$, *falls* $N(\beta)$ *die Norm von* β *über dem Quotientenkörper* $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{R}$ *bedeutet.*

Ob der Primäridealsatz auch unabhängig von der Normenbedingung gilt oder nicht, kann ich bis jetzt nicht entscheiden. Wichtig für die Beiträge VI und VII sind die folgenden beiden Bemerkungen:

a) *Die Normenbedingung ist sicher erfüllt, wenn nicht nur* $\mathfrak{R}$, *sondern auch* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen ist.* (Trivial, da gleichzeitig mit β stets auch $\beta^{-1} \cdot N(\beta)$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt.)

b) *Der Primäridealsatz gilt für* $\mathfrak{S}$ (ohne Rücksicht auf das Erfülltsein oder Nichterfülltsein der Normenbedingung) *immer, wenn zu* $\mathfrak{S}$ *ein ganz abhängiger Oberring* $\mathfrak{T}$ *existiert, der sowohl über* $\mathfrak{R}$ *als auch über* $\mathfrak{S}$ *eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen besitzt und seinerseits der Normenbedingung über* $\mathfrak{R}$ *genügt.*

In der Tat, unter unseren Voraussetzungen ist jedenfalls $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} = \mathfrak{z}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_m$, wobei die $\mathfrak{z}_i$ Primärideale sind, für die die Gleichungen $\mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$ gelten. Setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S}$, so sind auch die $\mathfrak{y}_i$ Primärideale, und es wird $\mathfrak{y}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{z}_i \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Außerdem folgt aus der Existenz der Modulbasis von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{S}$ nach einer elementaren, in

---

[1]) Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 1—19 bzw. 319—334.

[2]) Also ein Oberring, dessen sämtliche Elemente von $\mathfrak{R}$ ganz abhängen.

Beitrag VI beim Beweise von Satz 8 ausführlich durchgeführten Überlegung sofort $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S} = ((\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{S}) \cdot \mathfrak{T}) \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{T} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S} = (\mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{z}_m \cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{y}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{y}_m$. Fertig!

Bemerkung a) zeigt, daß der Beweis von Satz 10 in Beitrag VI einwandfrei ist. Denn jeder „unverzweigte" Oberring von $\mathfrak{R}$ ist ganz abgeschlossen.

Bemerkung b) zeigt die Richtigkeit der Behauptung γ) des Satzes 2 von Beitrag VII, für die wegen der Berufung auf die zu weitgehende Behauptung der Anmerkung [21]) von Beitrag VI in Beitrag VII selbst kein stichhaltiger Beweis gegeben worden war. — Es handelt sich an der genannten Stelle darum, zu zeigen, daß der Primäridealsatz gilt, wenn der ganz abgeschlossene Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ einen Unterkörper K enthält, über dem der Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ „streng transzendent" ist, und wenn gleichzeitig der Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ die Gestalt $A \cdot \mathfrak{R}$ besitzt, wobei A einen endlich-algebraischen Oberkörper von K bedeutet. Verstehen wir nun unter N den kleinsten A umfassenden Normalkörper über K, und setzen wir $\mathfrak{T} = \mathsf{N} \cdot \mathfrak{R}$, so hat $\mathfrak{T}$ aus den beim Beweise von Satz 2 in Beitrag VII ausführlich dargelegten Gründen sowohl über $\mathfrak{R}$ als auch über $\mathfrak{S}$ eine Modulbasis von endlich vielen linear unabhängigen Elementen; außerdem genügt $\mathfrak{T}$ der Normenbedingung über $\mathfrak{R}$, weil $\mathfrak{T}$ gleichzeitig mit β stets auch sämtliche Konjugierten von β über $\mathfrak{R}$ enthält. Man kann also unmittelbar das unter b) abgeleitete Kriterium anwenden.

Außer an den soeben behandelten Stellen wurde weder in Beitrag VI noch in Beitrag VII irgendwo auf Anmerkung [21]) von Beitrag VI zurückgegriffen. Das in dieser Anmerkung begangene Versehen ist also bedeutungslos.

(Eingegangen am 25. April 1942.)

Preisaufgabe der Technischen Hochschule Karlsruhe.

Die Technische Hochschule Fridericiana in Karlsruhe erläßt zum Gedächtnis des durch lange Jahre in ihrem Lehrkörper wirkenden Bahnbrechers der mathematischen Logik Ernst Schröder aus Anlaß der 100. Wiederkehr seines Geburtstages die folgende *Preisaufgabe*:

> Die Untersuchungen Ernst Schröders zum Eliminations- und Auflösungsproblem in der Logik der Relative (Vorlesungen über die Algebra der Logik III, 1, Leipzig 1895; vgl. J. C. C. Mc Kinsey, Postulates for the calculus of binary relations, J. Symbolic Logic **3** (1940), S. 85—97, und A. Tarski, On the calculus of relations, ebenda **6** (1941), 73—89) sollen mit den heute verfügbaren Hilfsmitteln (vgl. H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen **86** (1922), S. 163—229 und vor allem W. Ackermann, Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, ebenda **110** (1934), S. 390—413 und Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik, ebenda **111** (1935), S. 61—63, sowie Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Aufl., Berlin 1938, S. 106f.) weitergeführt werden.

Als Preis wird der Betrag von 500 RM für die beste Lösung der Aufgabe ausgesetzt. Als Zeitpunkt für die Einlieferung der Lösungen wird mit Rücksicht auf die Kriegsverhältnisse vorläufig der 1. Oktober 1944 angesetzt. Dem Preisrichterkollegium gehören außer dem Rektor der Technischen Hochschule Karlsruhe als Vorsitzendem, Prof. Dr.-Ing. R. G. Weigel, und dem Dekan der math.-naturw. Fakultät Prof. Dr. A. Bühl an: Studienrat Dr. Wilh. Ackermann (Burgsteinfurt), Prof. Dr. C. Boehm (Karlsruhe), der Herausgeber der Frege-Studien Jürgen v. Kempski (Berlin), Prof. Dr. Heinr. Scholz (Münster i. W.) sowie Prof. Dr. E. Ungerer in Karlsruhe als Geschäftsführer. Etwaige Anfragen sind an den Geschäftsführer zu richten.

Wir suchen zum sofortigen Eintritt tüchtige
Mathematiker
mit vollendeter Hochschulbildung für Forschungsarbeiten auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Lichtbild, Angabe der Gehaltsansprüche und des frühesten Eintrittstermins sind zu richten an
Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring
Braunschweig, Postschließfach 390

Mathematik der Lebensversicherung
Vorlesungen von Dr. **Alfred Berger**, a. o. Professor an der Universität in Wien. VII, 275 Seiten. 1939. RM 24.—; Ganzleinen RM 25.80.

SPRINGER-VERLAG · WIEN

Soeben erschien:

Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes

Von

Professor Dr. Béla v. Sz. Nagy

Szeged

IV, 80 Seiten. 1942. RM 9.80

(„Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", V. Band, 5. Heft)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. — **Grundbegriffe.** Axiomatische Definition des Raumes $\mathfrak{R}$. Einige Realisierungen des abstrakten Raumes $\mathfrak{R}$. Kartesisches Produkt von Räumen. Konvexe Mengen, Linearmannigfaltigkeiten und Unterräume. Lineare Operationen. Schwache Konvergenz. Beschränkte lineare Transformationen. — **Beschränkte selbstadjungierte und normale Transformationen.** Selbstadjungierte Transformationen. Projektionen. Normale und unitäre Transformationen. — **Integrale beschränkter Funktionen in bezug auf eine Spektralschar.** Spektralscharen. Integral einer Treppenfunktion. Integral stetiger oder zu einer Baireschen Klasse gehöriger Funktionen. Integrale in bezug auf eine mehrparametrige Spektralschar. — **Kanonische Spektraldarstellung beschränkter selbstadjungierter und normaler Transformationen.** Spektraldarstellung beschränkter selbstadjungierter Transformationen. Spektraldarstellung beschränkter normaler Transformationen. — **Verallgemeinerung des Begriffs einer Transformation. Nichtbeschränkte selbstadjungierte und normale Transformationen.** Allgemeine Betrachtungen. Über das Produkt $T^* T$. Vertauschbarkeit, kartesisches Produkt und Reduktion von Transformationen. Selbstadjungierte und normale Transformationen. — **Symmetrische Transformationen.** Definition und einige einfache Eigenschaften. Halbbeschränkte symmetrische Transformationen. Cayleysche Transformierte, Fortsetzung einer symmetrischen Transformation. Maximale symmetrische Transformationen. Reelle Transformationen. — **Integrale allgemeiner Funktionen in bezug auf eine Spektralschar.** Beschränkte Funktionen. Nichtbeschränkte Funktionen. Erweiterte Spektralschar. Projektionsmaß. — **Kanonische Spektraldarstellung allgemeiner selbstadjungierter und normaler Transformationen.** Erster Beweis. Anderer Beweis. Halbbeschränkte selbstadjungierte Transformationen. Faktorzerlegung allgemeiner Transformationen. — **Über das Spektrum einer Transformation.** Eigenwerte. Eigenelemente. Vollstetige normale Transformationen. Verhalten der Spektralschar beim Grenzübergang. Störungstheorie. Unitäre Äquivalenz. — **Funktionen selbstadjungierter oder normaler Transformationen.** Begriff der Funktion einer oder mehrerer Transformationen. Bedingungen dafür, daß eine Transformation Funktion gegebener Transformationen sei. Simultane Spektraldarstellung eines Abelschen Systems von selbstadjungierten oder normalen Transformationen. Zweiter Beweis. — **Spektraldarstellung von Gruppen und Halbgruppen linearer Transformationen.** Gruppen von unitären Transformationen. Halbgruppen selbstadjungierter Transformationen. Halbgruppen normaler Transformationen. — Zeichenregister. — Literaturverzeichnis.

SPRINGER — VERLAG · BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen

Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Band I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mit 60 Figuren. XXVI u. 642 S. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler Kom.-Ges., Leipzig 1942. Geb. RM 37.—

Baule, Bernhard, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band I: Differential- und Integralrechnung. Mit 161 Abbildungen. VIII u. 154 S. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1942. Kart. RM 7.—

Mangoldt, H. v., Einführung in die höhere Mathematik für Studierende und zum Selbststudium. Vollständig neu bearbeitet und erweitert von Konrad Knopp. 7. Auflage. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1942.

Band I: Zahlen. Funktionen. Grenzwerte. Analytische Geometrie. Algebra. Mengenlehre. XV u. 585 S. Mit 112 Figuren. Geb. RM. 16.80

Band II: Differentialrechnung. Unendliche Reihen. Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie. XVI u. 635 S. Mit 108 Figuren. Geb. RM 16.80

Band III: Integralrechnung und ihre Anwendungen. Funktionentheorie. Differentialgleichungen. XVI u. 618 S. Mit 103 Figuren. Geb. RM 16.80

Piccard, Sophie, Sur des ensembles parfaits, 196 S. Mémoires de l'Université de Neuchatel, t. 16. Librairie Gauthiers-Villars & Cie, Paris 1942. Geh. schw. Fr. 7.50

Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Anno X, XI, XII. Casa editrice Dott. Antonio Milani, Padova 1939—1941.

Springer-Verlag in Berlin W9. — Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albert Meyer, Berlin-Steglitz, Kühlebornweg 5. — Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany